Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Herausgegeben von **K. Hensel, H. Hasse, L. Schlesinger.**
Druck und Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10.

Sonderabdruck aus Band 166 Heft 3. 1932.

Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil II[1]).

Von *Kurt Mahler* in Göttingen.

IV.

14. Im Gegensatz zu bisher werde $\varrho_0 = \varrho_1 = \cdots = \varrho_m = \varrho$ als feste endliche natürliche Zahl und m als eine natürliche Zahl, die über alle Grenzen wächst, angenommen und dann

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = A_{k+1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & m \\ \varrho & \varrho & \dots & \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{e^{z\mathfrak{z}}\,d\mathfrak{z}}{\prod\limits_{h=0}^{m}(\mathfrak{z}+k-h)^{\varrho}},$$

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & m \\ \varrho & \varrho & \dots & \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\infty} \frac{e^{z\mathfrak{z}}\,d\mathfrak{z}}{\prod\limits_{h=0}^{m}(\mathfrak{z}-h)^{\varrho}}$$

gesetzt, so daß

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{k=0}^{m} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) e^{kz}$$

ist. Offenbar ist

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{l=0}^{\varrho-1} \frac{z^l}{l!} A_k^{(l)}\begin{pmatrix} m \\ \varrho \end{pmatrix}, \qquad A_k^{(l)}\begin{pmatrix} m \\ \varrho \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{\mathfrak{z}^{l-\varrho}\,d\mathfrak{z}}{\prod\limits_{\substack{h=0 \\ h\neq k}}^{m}(\mathfrak{z}+k-h)^{\varrho}}.$$

Setzt man

$$\psi_k\left(\mathfrak{z} \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \prod_{\substack{h=0 \\ h\neq k}}^{m} (\mathfrak{z}+k-h)^{-\varrho},$$

so ist also

$$(\varrho - l - 1)!\, A_k^{(l)}\begin{pmatrix} m \\ \varrho \end{pmatrix} = \left(\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)^{\varrho-l-1} \psi_k\left(\mathfrak{z} \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\Bigg|_{\mathfrak{z}=0}.$$

15. Um die Ableitungen von $\psi_k(\mathfrak{z})$ zu bestimmen, werde die Funktion

$$\chi_k^{(l)}\left(\mathfrak{z} \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{\substack{h=0 \\ h\neq k}}^{m} (\mathfrak{z}+k-h)^{-l}$$

---

[1]) Teil I erschien als letzter Beitrag zu Heft 2 dieses Bandes. —

Druckfehler-Berichtigung zum ersten Teil dieser Arbeit:

S. 121, Zeile 8 von unten: man lese $z_1^{\alpha_1}$ statt z^{α_1}.

S. 121, Zeile 6 von unten: man lese $\mathfrak{a}_1 \omega_{m\mathfrak{a}_2}(z_2)$ statt $\mathfrak{a}_1 \omega_{m\mathfrak{a}_2} \mathfrak{a}_2(z_2)$.

S. 127, Zeile 3 von unten: man lese Spalte statt Zeile.

eingeführt. Macht man den Ansatz

$$\left(\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)^l \psi_k\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \psi_k\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \Phi_k^{(l)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right),$$

so findet man

$$\Phi_k^{(0)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = 1, \quad \Phi_k^{(1)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = -\varrho\chi_k^{(1)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right), \quad \Phi_k^{(2)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \varrho^2\chi_k^{(1)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)^2 + \varrho\chi_k^{(2)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right).$$

Allgemeiner ist offenbar

$$\frac{d}{d\mathfrak{z}}\chi_k^{(l)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = -l\chi_k^{(l+1)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

und

$$\Phi_k^{(l+1)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = -\varrho\chi_k^{(1)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\Phi_k^{(l)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) + \frac{d}{d\mathfrak{z}}\Phi_k^{(l)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right).$$

Durch Schluß von l auf $l+1$ ergibt sich daher aus den letzten Formeln der Hilfssatz:

a) Es ist identisch

$$\Phi_k^{(l)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+l\lambda_l=l} C_{\lambda_1,\ldots,\lambda_l}\,\varrho^{\lambda_1+\cdots+\lambda_l}\,\chi_k^{(1)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)^{\lambda_1}\cdots\chi_k^{(l)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)^{\lambda_l},$$

wobei über alle Zerlegungen von l der Form

$$l = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + l\lambda_l$$

mit nichtnegativen ganzen rationalen λ summiert wird und die $C_{\lambda_1,\ldots,\lambda_l}$ gewisse ganze rationale Zahlen sind, die allein von der betreffenden Zerlegung, nicht aber von ϱ oder m oder k abhängen.

16. Zur Abkürzung werde gesetzt [2]):

$$M_m = m!, \qquad D_m = \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Wegen

$$\psi_k\left(0\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \left(\frac{(-1)^{m-k}}{k!\,(m-k)!}\right)^\varrho, \qquad \chi_k^{(l)}\left(0\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{\substack{h=0 \\ h\neq k}}^{m} \frac{1}{(k-h)^l}$$

ist dann offenbar jede der Zahlen

$$M_m^\varrho\,\psi_k\left(0\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = (-1)^{(m-k)\varrho}\binom{m}{\varrho}^\varrho \quad \text{und} \quad D_m^l\,\chi_k^{(l)}\left(0\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

ganz rational; aus Hilfssatz a folgt also:

b) Die Zahl

$$M_m^\varrho D_m^\varrho \left(\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)^l \psi_k\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\Bigg|_{\mathfrak{z}=0} = \Psi_k^{(l)}\binom{m}{\varrho}$$

ist ganz rational.

Es gelingt unschwer, für $\Psi_k^{(l)}\binom{m}{\varrho}$ obere Schranken anzugeben. Wenn ε eine positive Konstante ist, so besteht bekanntlich für $m \geqq m_0(\varepsilon)$ die Ungleichung [3])

$$D_m \leqq e^{(1+\varepsilon)m}.$$

Weiter ist

$$\binom{m}{k} \leqq 2^m, \qquad \left|\sum_{\substack{h=0 \\ h\neq k}}^{m} \frac{1}{(k-h)^l}\right| \leqq 2\sum_{h=1}^{m}\frac{1}{h^l} = O(e^{\varepsilon m}).$$

---

[2]) Das Zeichen $\{1, 2, \ldots, m\}$ bedeutet das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $1, 2, \ldots, m$.

[3]) Siehe hierzu: E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, I, S. 74 u. 195

Demnach ergibt sich der weitere Hilfssatz:

c) Für jedes $\varepsilon > 0$ und gleichmäßig in k besteht die Ungleichung

$$\Psi_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} = O(e^{(1+\varepsilon)m\varrho}\, 2^{m\varrho}).$$

17. Setzt man

$$\mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} = M_m^\varrho D_m^\varrho \frac{(\varrho-1)!}{l!} A_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} = \binom{\varrho-1}{l}\Psi_k^{(\varrho-l-1)}\binom{m}{\varrho},$$

so sind nach b und c die Zahlen $\mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho}$ sämtlich ganz rational, und es ist gleichmäßig in den Indizes für genügend großes m

$$\left|\mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho}\right| \leqq (3e)^{m\varrho}.$$

Alsdann ist

$$(\varrho-1)!\, M_m^\varrho D_m^\varrho A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{l=0}^{\varrho-1} \mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} z^l.$$

Es möge gesetzt werden:

$$\sum_{k=0}^{m} \mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} u^k = \boldsymbol{a}^{(l)}\left(u \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right).$$

Dann ist offenbar

$$(\varrho-1)!\, M_m^\varrho D_m^\varrho R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{l=0}^{\varrho-1} \boldsymbol{a}^{(l)}\left(e^z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) z^l.$$

Im folgenden nehmen wir e^z positiv rational an:

$$e^z = \frac{x}{y}$$

mit zwei teilerfremden natürlichen Zahlen x und y. Die Zahlen

$$y^m \boldsymbol{a}^{(l)}\left(e^z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = a_l\binom{m}{\varrho}$$

sind demnach ganz rational und genügen für genügend großes ϱ und m der Ungleichung

$$\left|a_l\binom{m}{\varrho}\right| \leqq (4e)^{m\varrho}.$$

Wird noch gesetzt:

$$(\varrho-1)!\, y^m M_m^\varrho D_m^\varrho R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = r\binom{m}{\varrho},$$

so sind demnach die Koeffizienten der Näherungsform

$$r\binom{m}{\varrho} = \sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l\binom{m}{\varrho} z^l$$

als ganz rational erkannt und nach oben abgeschätzt. Auch für den Wert dieser Näherungsform selbst können Schranken nach oben und unten hergeleitet werden.

18. Dazu beschränken wir uns auf zwei spezielle Fälle: entweder sei z reell und positiv, oder es sei $e^z = 1$ und $z = 2\pi i$.

Im ersten Fall werde ausgegangen von der Formel

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = (J^\varrho e^z)^m \frac{z^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!}.$$

Längs der Strecke

$$0 \leqq t \leqq z$$

ist

$$1 \leqq e^t \leqq e^z,$$

also nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$J^{m\varrho} \frac{z^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!} \leqq R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \leqq e^{mz} J^{m\varrho} \frac{z^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!}.$$

Hieraus ergibt sich die Ungleichung

$$\frac{z^{m\varrho+\varrho-1}}{(m\varrho+\varrho-1)!} \leqq R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \leqq e^{mz} \frac{z^{m\varrho+\varrho-1}}{(m\varrho+\varrho-1)!}.$$

Nach der Stirlingschen Formel ist aber

$$m!^{\varrho} \sim (2\pi)^{\frac{\varrho}{2}} m^{\frac{\varrho}{2}} m^{m\varrho} e^{-m\varrho},$$

$$(m\varrho+\varrho-1)! \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} \varrho^{-\frac{1}{2}} m^{(m+1)\varrho} \varrho^{(m+1)\varrho} e^{-m\varrho},$$

also

$$\frac{m!^{\varrho}}{(m\varrho+\varrho-1)!} \sim \left(\frac{2\pi}{m}\right)^{\frac{\varrho-1}{2}} \varrho^{\frac{1}{2}-(m+1)\varrho}.$$

Bedeutet ε eine positive Konstante, so ist demnach für genügend großes m

$$z^{m\varrho} \varrho^{-m\varrho} e^{-\frac{m\varepsilon}{2}} \leqq M_m^{\varrho} R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \leqq z^{m\varrho} \varrho^{-m\varrho} e^{mz} e^{+\frac{m\varepsilon}{2}},$$

und da ferner nach dem Primzahlsatz für genügend großes m

$$e^{m-\frac{m\varepsilon}{2\varrho}} \leqq D_m \leqq e^{m+\frac{m\varepsilon}{2\varrho}}$$

ist, so erhält man für $m \geqq m_0(\varepsilon, \varrho)$ die Ungleichungen

$$\left(\frac{e\,z}{\varrho}\right)^{m\varrho} y^m e^{-m\varepsilon} \leqq r\begin{pmatrix} m \\ \varrho \end{pmatrix} \leqq \left(\frac{e\,z}{\varrho}\right)^{m\varrho} y^m e^{mz} e^{+m\varepsilon}.$$

Diese Ungleichungen lassen sich im Verein mit den früheren in einer einfachen Form aussprechen. Sei

$$a = (4e)^{m\varrho};$$

alsdann können die vorigen Ungleichungen geschrieben werden:

$$a^{-\Omega_1} \leqq r\begin{pmatrix} m \\ \varrho \end{pmatrix} \leqq a^{-\Omega_2}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{1}{\log(4e)}\left(\log\varrho - \log(ez) - \frac{\log y - \varepsilon}{\varrho}\right), \\ \Omega_2 &= \frac{1}{\log(4e)}\left(\log\varrho - \log(ez) - \frac{\log y + z + \varepsilon}{\varrho}\right), \end{aligned} \qquad \Omega_1 > \Omega_2.$$

Mit wachsendem ϱ streben beide Zahlen gegen Unendlich, während ihre Differenz gegen Null konvergiert. *Bedeutet Ω eine beliebig große positive Zahl, so gibt es also eine natürliche Zahl ϱ, für die*

$$\Omega_1 > \Omega_2 \geqq \Omega$$

ist; alsdann gehören zu jeder genügend großen natürlichen Zahl m je ϱ ganze rationale Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{\varrho-1}$, so daß zugleich

$$\max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{\varrho-1}|) \leqq C^m, \qquad C = C(\varrho) = (4e)^\varrho$$

und

$$C^{-m\Omega_1} \leqq \sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l z^l \leqq C^{-m\Omega_2}$$

ist.

In dieser Aussage ist nach dem Transzendenzkriterium in 2. insbesondere die Transzendenz von $\log \zeta$ enthalten.

19. Um ein entsprechendes Ergebnis für die Zahl π zu erhalten, werde weiter statt m die gerade Zahl $2m$ eingesetzt. Man hat offenbar

$$R\left(2\pi i \,\middle|\, \begin{matrix} 2m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\infty} \frac{e^{2\pi i \mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}}{\{\mathfrak{z}(\mathfrak{z}-1)\cdots(\mathfrak{z}-2m)\}^\varrho} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\infty} \frac{e^{2\pi i \mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}}{\{\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2-1^2)\cdots(\mathfrak{z}^2-m^2)\}^\varrho},$$

oder wenn die neue Veränderliche

$$u = \frac{i\mathfrak{z}}{m}$$

eingeführt wird:

$$R\left(2\pi i \,\middle|\, \begin{matrix} 2m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{i^{2m\varrho+\varrho-2}}{2\pi m^{2m\varrho+\varrho-1}} \int\limits_{C_\infty} \left\{u\left(u^2+\frac{1^2}{m^2}\right)\cdots\left(u^2+\frac{m^2}{m^2}\right)\right\}^{-\varrho} e^{2\pi m u}\, du.$$

Hier kann der Integrationsweg leicht auf Grund des Cauchyschen Integralsatzes übergeführt werden in eine Gerade G_α, die senkrecht zur reellen Achse durch den Punkt $\alpha > 0$ auf der reellen Achse geht; wird integriert in der Richtung vom Negativ-Imaginären zum Positiv-Imaginären, so ist dann

$$R\left(2\pi i \,\middle|\, \begin{matrix} 2m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{i^{2m\varrho+\varrho-2}}{2\pi m^{2m\varrho+\varrho-1}} \int\limits_{G_\alpha} e^{2\pi m u - \varrho\,\tau(u)}\, du,$$

$$\tau(u) = \log u + \sum_{k=1}^{m} \log\left(u^2 + \frac{k^2}{m^2}\right).$$

Dabei ist die u-Ebene längs der negativ-reellen Achse aufzuschneiden und in der aufgeschnittenen Ebene unter $\log u$ das Integral

$$\log u = \int_1^u \frac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}$$

zu verstehen.

Die Funktion $\tau(u)$ läßt sich mittels der Eulerschen Summenformel vereinfachen. Bedeutet $S(x)$ die Funktion

$$S(x) = \frac{(x-[x])^2 - (x-[x])}{2},$$

so ist für zwischen 0 und m zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f(x)$

$$\frac{f(0)+f(m)}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} f(k) = \int_0^m f(x)\, dx - \int_0^m f''(x)\, S(x)\, dx,$$

also mit $x = mt$

$$\tau(u) - \log\sqrt{u^2+1} = m\int_0^1 \log(u^2+t^2)\,dt - \frac{2}{m}\int_0^1 \frac{u^2-t^2}{(u^2+t^2)^2}\,S(mt)\,dt.$$

Das letzte Integral hat längs G_α gleichmäßig in u die Größenordnung

$$O(1),$$

während das erste Integral den genauen Wert

$$\frac{u}{i}\log\frac{u+i}{u-i} + \log(u^2+1) - 2$$

besitzt. Längs G_α ist somit gleichmäßig in u

$$\tau(u) = m\left\{\frac{u}{i}\log\frac{u+i}{u-i} + \log(u^2+1) - 2\right\} + \log\sqrt{u^2+1} + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

In gleicher Weise findet man bei den Ableitungen

$$\tau^{(l)}(u) = (-1)^{l-1}(l-1)!\sum_{k=-m}^{+m}\left(u+\frac{ki}{m}\right)^{-l} \qquad (l = 1, 2, 3)$$

die Werte

$$\tau'(u) = \frac{m}{i}\log\frac{u+i}{u-i} + \frac{u}{u^2+1} + O\left(\frac{1}{m}\right), \quad \tau''(u) = -\frac{2m}{u^2+1} + O(1), \quad \tau'''(u) = O(m),$$

die ebenfalls gleichmäßig auf G_α gelten.

Von jetzt ab sei $\varrho \geqq 5$ und α durch die Gleichung

$$\frac{2\pi}{\varrho} = \frac{1}{i}\log\frac{\alpha+i}{\alpha-i} \equiv 2\operatorname{arc\,cotg}\alpha$$

bestimmt, also

$$\alpha = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{\varrho}.$$

Dann ist

$$\varrho\tau'(\alpha) = 2\pi m + \frac{\alpha\varrho}{\alpha^2+1} + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Der Integrationsweg des Integrales

$$\mathfrak{J} = \int_{G_\alpha} e^{2\pi m u - \varrho\tau(u)}\,du = i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi m(\alpha+ti) - \varrho\tau(\alpha+ti)}\,dt$$

werde zerlegt in die Teilintervalle

$$(-m^{-2/5}, +m^{-2/5}), \qquad (-\infty, -m^{-2/5}), \qquad (+m^{-2/5}, +\infty).$$

Im ersten Intervall ist nach der Taylorschen Reihe mit Restglied in Integralform offenbar gleichmäßig in u

$$2\pi m(\alpha+ti) - \varrho\tau(\alpha+ti) = (2\pi m\alpha - \varrho\tau(\alpha)) + ti(2\pi m - \varrho\tau'(\alpha)) + \frac{\varrho t^2}{2}\tau''(\alpha) + O(mt^3)$$

$$= (2\pi m\alpha - \varrho\tau(\alpha)) - \frac{\varrho m t^2}{\alpha^2+1} + O(m^{-1/5}),$$

ferner

$$\int_{-m^{-2/5}}^{+m^{-2/5}} e^{-\frac{\varrho m t^2}{\alpha^2+1}}\,dt = m^{-1/2}\int_{-m^{1/10}}^{+m^{1/10}} e^{-\frac{\varrho t^2}{\alpha^2+1}}\,dt \sim m^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\varrho t^2}{\alpha^2+1}}\,dt = \left(\frac{(\alpha^2+1)\pi}{m\varrho}\right)^{1/2},$$

folglich

$$\int_{-m^{-2/5}}^{+m^{-2/5}} e^{2\pi m(\alpha+ti)-\varrho\tau(\alpha+ti)}\,dt \sim \left(\frac{(\alpha^2+1)\pi}{m\varrho}\right)^{1/2} e^{2\pi m\alpha-\varrho\tau(\alpha)}.$$

Die Integrale über die beiden noch übrigen Intervalle liefern einen Beitrag von geringerer Größenordnung. Denn es ist

$$\tau(\alpha+ti)-\tau(\alpha)=\sum_{k=-m}^{+m}\log\frac{\alpha+ti+\frac{ki}{m}}{\alpha+\frac{ki}{m}}=\frac{1}{2}\sum_{k=-m}^{+m}\log\left(\frac{\alpha+ti+\frac{ki}{m}}{a+\frac{ki}{m}}\cdot\frac{a+ti-\frac{ki}{m}}{\alpha-\frac{ki}{m}}\right),$$

also

$$\Re(\tau(\alpha+ti)-\tau(\alpha))=\frac{1}{2}\sum_{k=-m}^{+m}\log\left|\frac{(\alpha+ti)^2+\frac{k^2}{m^2}}{\alpha^2+\frac{k^2}{m^2}}\right|=\frac{1}{4}\sum_{k=-m}^{+m}\log\frac{\left(\alpha^2+\frac{k^2}{m^2}-t^2\right)^2+4\alpha^2t^2}{\left(\alpha^2+\frac{k^2}{m^2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=-m}^{+m}\log\left(1+t^2\,\frac{2\left(\alpha^2-\frac{k^2}{m^2}\right)+t^2}{\left(\alpha^2+\frac{k^2}{m^2}\right)^2}\right).$$

Weiter ist $k^2 \leqq m^2$ und wegen der Annahme $\varrho \geqq 5$

$$\alpha=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{\varrho}\geqq\operatorname{cotg}\frac{\pi}{5}>1.$$

Also gibt es eine positive Konstante c, die weder von k, noch von m abhängt, so daß für jedes reelle t

$$\frac{2\left(\alpha^2-\frac{k^2}{m^2}\right)+t^2}{\left(\alpha^2+\frac{k^2}{m^2}\right)}\geqq c$$

ist, folglich auch

$$\Re(\tau(\alpha+ti)-\tau(\alpha))\geqq\frac{2m+1}{4}\log(1+ct^2)$$

und demnach

$$\left|\left\{\int_{-\infty}^{-m^{-2/5}}+\int_{+m^{-2/5}}^{+\infty}\right\}e^{2\pi m(\alpha+ti)-\varrho\,\tau(\alpha+ti)}\,dt\right|\leqq 2e^{2\pi m\alpha-\varrho\,\tau(\alpha)}\int_{+m^{-2/5}}^{\infty}(1+ct^2)^{-\frac{2m+1}{4}}\,dt.$$

Das Integral rechts geht durch die Substitution

$$1+ct^2=(1+cm^{-4/5})\,x$$

über in den Ausdruck

$$\int_1^\infty\frac{(1+cm^{-4/5})^{-\frac{2m-3}{4}}x^{-\frac{2m+1}{4}}}{2\sqrt{c}\sqrt{(1+cm^{-4/5})\,x-1}}\,dx,$$

ist daher für $m\to\infty$ von geringerer Größenordnung als jede negative Potenz von m.

Damit ist folgende asymptotische Formel bewiesen:

$$R\left(2\pi i\,\middle|\,\frac{2m}{\varrho}\right)\sim\frac{i^{2m\varrho+\varrho-1}}{2\pi m^{2m\varrho+\varrho-1}}\sqrt{\frac{(\alpha^2+1)\pi}{m\varrho}}\,e^{2\pi m\alpha-\varrho\tau(\alpha)};$$

sie läßt sich nach den früheren Abschätzungen überführen in

$$R\left(2\pi i \,\middle|\, \frac{2m}{\varrho}\right) \sim \frac{i^{2m\varrho+\varrho-1}\, e^{2m\varrho}\left(\sin\frac{\pi}{\varrho}\right)^{2m\varrho+\varrho-1}}{2\sqrt{\pi m\varrho}\; m^{2m\varrho+\varrho-1}}.$$

Bedeutet ε eine positive Zahl, so ist folglich für $m \geqq m_0(\varepsilon, \varrho)$

$$e^{-\varepsilon m}\left(2e\sin\frac{\pi}{\varrho}\right)^{2m\varrho} \leqq \left| r\left(\frac{2m}{\varrho}\right)\right| \leqq e^{+\varepsilon m}\left(2e\sin\frac{\pi}{\varrho}\right)^{2m\varrho}.$$

Diese Ungleichung läßt sich in ähnlicher Weise wie früher interpretieren. Sei zur Abkürzung

$$\Omega_1 = \Omega_0 + \eta, \qquad \Omega_2 = \Omega_0 - \eta,$$

$$\Omega_0 = \frac{\log\left\{\left(2e\sin\frac{\pi}{\varrho}\right)^{-1}\right\}}{\log(4e)}, \qquad \eta = \frac{\varepsilon}{2\varrho\log(4e)}.$$

Mit wachsendem ϱ streben Ω_1 und Ω_2 gegen Unendlich; ihre Differenz kann beliebig klein angenommen werden. *Wenn Ω eine beliebig große positive Zahl ist, so gibt es eine natürliche Zahl ϱ, für die*

$$\Omega_1 > \Omega_2 \geqq \Omega$$

ist; alsdann gehören zu jeder genügend großen natürlichen Zahl m je ϱ ganze rationale Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{\varrho-1}$, so daß

$$\max\left(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{\varrho-1}|\right) \leqq C^m, \qquad C = (4e)^{2\varrho}$$

und gleichzeitig

$$C^{-m\Omega_1} \leqq \left|\sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l z^l\right| \leqq C^{-m\Omega_2}, \qquad z = 2\pi i$$

ist. Hierin ist speziell die Transzendenz von π enthalten.

20. Mittels einer allgemeinen Überlegung läßt sich aus den letzten Ergebnissen ableiten, daß weder der reelle Logarithmus einer positiven rationalen Zahl, noch die Zahl $2\pi i$, also auch nicht die Zahl π selbst, U-Zahlen sind.

Von der Zahl z werde angenommen, daß sich zu ihr eine natürliche Zahl ϱ, eine Zahl $C > 1$ und zwei positive Zahlen Ω_1 und Ω_2 mit $\Omega_1 > \Omega_2$ angeben lassen, daß zu jeder genügend großen natürlichen Zahl m dann ϱ ganze rationale Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{\varrho-1}$ existieren, die den Ungleichungen

$$0 < \max\left(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{\varrho-1}|\right) \leqq C^m,$$

$$C^{-m\Omega_1} \leqq \left|\sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l z^l\right| \leqq C^{-m\Omega_2}$$

genügen.

Sei dann q eine natürliche Zahl mit

$$q - 1 < \Omega_2,$$

so daß offenbar z nicht algebraisch von höchstens q-tem Grad ist. Eine beliebige Näherungsform

$$R = A_0 + A_1 z + \cdots + A_q z^q, \quad A = \max\left(|A_0|, |A_1|, \ldots |A_q|\right) \geqq 1$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten heiße primitiv, wenn die Nullstellen des Polynoms

$$A_0 + A_1 x + \cdots + A_q x^q$$

algebraische Zahlen genau vom Grad q sind. Es werde angenommen, daß zu einer gewissen positiven Zahl λ unendlichviele primitive Näherungsformen

$$R_k = A_{0k} + A_{1k} z + \cdots + A_{qk} z^q, \qquad A_k = \max(|A_{0k}|, |A_{1k}|, \ldots, |A_{qk}|) \geqq 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

als Lösung der Ungleichung

$$0 < |R_k| \leqq A_k^{-\lambda} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

existieren.

Sei in lineare Faktoren zerlegt:

$$A_{0k} + A_{1k} x + \cdots + A_{qk} x^q = A_{qk} (x - \zeta_k)(x - \zeta_k') \cdots (x - \zeta_k^{(q-1)}).$$

Unter den Zahlen $\zeta_k, \zeta_k', \ldots, \zeta_k^{(q-1)}$ gibt es eine, die möglichst nahe bei der Zahl z liegt; sie sei etwa gleich ζ_k. Dann ist gewiß

$$0 < |z - \zeta_k| \leqq A_k^{-\frac{\lambda}{q}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Jeder Näherungsform R_k mit großem k kann eine Näherungsform $\sum\limits_{l=0}^{\varrho-1} a_l z^l$ zugeordnet werden durch die Bedingung

$$C^{m\vartheta} \leqq A_k \leqq C^{(m+1)\vartheta};$$

dabei bedeutet ϑ eine positive Konstante, über die später verfügt wird. Es werde gesetzt:

$$\sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l \zeta_k^{(\varkappa)^l} = Z_k^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, q-1).$$

Die Koeffizienten a_l sind nach Annahme ganz rational; ferner sind die Zahlen $\zeta_k, \zeta_k', \ldots, \zeta_k^{(q-1)}$ zueinander algebraisch konjugiert. Also sind auch die Zahlen $Z_k, Z_k', \ldots, Z_k^{(q-1)}$ zueinander algebraisch konjugiert; sie sind daher entweder alle zugleich Null oder zugleich von Null verschieden.

Sei jetzt k schon so groß, daß $|\zeta_k| \leqq 2|z|$ ist, und zur Abkürzung

$$c = 1 + 2 \cdot |2z| + 3 \cdot |2z|^2 + \cdots + (\varrho - 1) \cdot |2z|^{\varrho-2}.$$

Offenbar ist dann

$$\left| \int_z^{\zeta_k} (a_1 + 2a_2 x + \cdots + (\varrho - 1) a_{\varrho-1} x^{\varrho-2})\, dx \right| \leqq |z - \zeta_k| \cdot C^m \cdot c \leqq c C^{m\left(1 - \frac{\lambda\vartheta}{q}\right)},$$

und wegen

$$(a_0 + a_1 \zeta_k + \cdots + a_{\varrho-1} \zeta_k^{\varrho-1}) - (a_0 + a_1 z + \cdots + a_{\varrho-1} z^{\varrho-1}) = \int_z^{\zeta_k} (a_1 + 2a_2 x + \cdots + (\varrho - 1) a_{\varrho-1} x^{\varrho-2})\, dx$$

besteht die Ungleichung

$$|a_0 + a_1 \zeta_k + \cdots + a_{\varrho-1} \zeta_k^{\varrho-1}| \geqq C^{-m\Omega_1} - c C^{m\left(1 - \frac{\lambda\vartheta}{q}\right)}.$$

Wenn

$$\Omega_1 < \frac{\lambda\vartheta}{q} - 1$$

ist, so wird daher für genügend großes k die rechte Seite von Null verschieden; dann ist somit gleichzeitig

$$Z_k^{(\varkappa)} \neq 0 \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, q-1).$$

Das Produkt

$$P_k = A_{qk}^{q(\varrho-1)} \prod_{\varkappa=0}^{q-1} Z_k^{(\varkappa)}$$

ist folglich auch von Null verschieden, denn gewiß verschwindet A_{qk} nicht. Als symmetrische Funktion der $\zeta_k^{(\varkappa)}$ muß P_k rational sein; ferner ist P_k auch ganz, da der Nenner beseitigt ist. Also stellt P_k eine ganze und von Null verschiedene rationale Zahl dar, so daß sein Absolutbetrag mindestens Eins beträgt.

Die Zahlen $\zeta_k^{(\varkappa)}$ sind Wurzeln der Gleichung

$$A_{0k} + A_{1k}\, x + \cdots + A_{qk} x^q = 0;$$

für jede von ihnen ist daher

$$|\zeta_k^{(\varkappa)}|^q \leqq |A_{qk}\, \zeta_k^{(\varkappa)q}| \leqq A_k\{1 + |\zeta_k^{(\varkappa)}| + \cdots + |\zeta_k^{(\varkappa)}|^{q-1}\} = A_k \frac{|\zeta_k^{(\varkappa)}|^q - 1}{|\zeta_k^{(\varkappa)}| - 1},$$

also entweder $|\zeta_k^{(\varkappa)}| \leqq 1$ oder $|\zeta_k^{(\varkappa)}| \leqq A_k + 1$, d. h. es ist allgemein

$$|\zeta_k^{(\varkappa)}| \leqq A_k + 1 \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, q-1).$$

Also wird für genügend großes k

$$|Z_q^{(\varkappa)}| \leqq C^m \frac{(A_k+1)^\varrho - 1}{A_k} \leqq C^m \cdot 2^\varrho A_k^{\varrho-1} \leqq 2^\varrho C^{m+(\varrho-1)\vartheta(m+1)}$$

und endlich

$$|Z_k| \geqq \frac{1}{|A_{qk}|^{q(\varrho-1)} \prod\limits_{\varkappa=1}^{q-1} |Z_k^{(\varkappa)}|} \geqq \frac{1}{C^{q(\varrho-1)\vartheta(m+1)}\, (2^\varrho C^{m+(\varrho-1)\vartheta(m+1)})^{q-1}}$$

oder

$$|a_0 + a_1\, \zeta_k + \cdots + a_{\varrho-1}\, \zeta_k^{\varrho-1}| \geqq 2^{-\varrho(q-1)} C^{-\{m(q-1)+(2q-1)(\varrho-1)\vartheta(m+1)\}},$$

während andrerseits

$$|a_0 + a_1\, z + \cdots + a_{\varrho-1} z^{\varrho-1}| \leqq C^{-m\Omega_2}$$

ist. Nach Annahme besteht aber die Ungleichung

$$q - 1 < \Omega_2 .$$

Ohne Einschränkung darf daher auch angenommen werden, daß die Zahl ϑ der Ungleichung

$$q - 1 + (2q-1)(\varrho-1)\,\vartheta < \Omega_2$$

genügt. Dies ist der Fall, wenn ε eine kleine positive Konstante bedeutet und alsdann

$$\vartheta = \frac{\Omega_2 - q + 1}{(2q-1)(\varrho-1)(1+\varepsilon)}$$

gewählt wird. Dann wird für genügend großes k

$$\begin{aligned} &|(a_0 + a_1\, \zeta_k + \cdots + a_{\varrho-1}\, \zeta_k^{\varrho-1}) - (a_0 + a_1\, z + \cdots + a_{\varrho-1}\, z^{\varrho-1})| \\ &\geqq 2^{-\varrho(q-1)}\, C^{-\{m(q-1)+(2q-1)(\varrho-1)\vartheta(m+1)\}} - C^{-m\Omega_2} \geqq C^{-m\Omega_2} \end{aligned}$$

während andrerseits nach früherem

$$|(a_0 + a_1\, \zeta_k + \cdots + a_{\varrho-1}\, \zeta_k^{\varrho-1}) - (a_0 + a_1 z + \cdots + a_{\varrho-1}\, z^{\varrho-1})| \leqq c\, C^{-\left(\frac{\lambda\vartheta}{q}-1\right)m}$$

ist. Also muß von einem k ab, d. h. für gewisse beliebig große natürliche Zahlen m

$$C^{-m\Omega_2} \leqq c\, C^{-\left(\frac{\lambda\vartheta}{q}-1\right)m}$$

sein. Es war aber

$$\frac{\lambda\vartheta}{q} - 1 > \Omega_1$$

vorausgesetzt; wegen $\Omega_1 > \Omega_2$ ist daher erst recht

$$\frac{\lambda\vartheta}{q} - 1 > \Omega_2,$$

und man kommt zu einem Widerspruch.

Die beiden Ungleichungen

$$\frac{\lambda\vartheta}{q} - 1 > \Omega_1,$$

$$q - 1 + (2q - 1)(\varrho - 1)\,\vartheta < \Omega_2.$$

können also nicht gleichzeitig erfüllt sein. Die zweite durfte ohne Einschränkung durch die Wahl

$$\vartheta = \frac{\Omega_2 - q + 1}{(2q - 1)(\varrho - 1)(1 + \varepsilon)}$$

befriedigt werden. Also darf die erste Ungleichung nicht gelten, so daß

$$\lambda \leqq \frac{q(2q - 1)(\varrho - 1)(\Omega_1 + 1)}{\Omega_2 - q + 1}(1 + \varepsilon)$$

sein muß. Damit ist gezeigt:

Wenn λ der Ungleichung

$$\lambda > \frac{q(2q - 1)(\varrho - 1)(\Omega_1 + 1)}{\Omega_2 - q + 1}$$

genügt, so genügen die primitiven Näherungsformen

$$R = A_0 + A_1 z + \cdots + A_q z^q, \quad A = \max(|A_0|, |A_1|, \ldots, |A_q|) \geqq 1$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten und genügend großem A der Ungleichung

$$|R| \geqq A^{-\lambda}.$$

Man kann dies auch so ausdrücken, daß *alle* primitiven Näherungsformen mit ganzen rationalen Koeffizienten, die nicht gleichzeitig verschwinden, der Ungleichung

$$|R| \geqq \Lambda A^{-\lambda}$$

genügen, wo die positive Konstante Λ wohl von λ, nicht aber von den Koeffizienten von R abhängt.

21. Auch für beliebige Näherungen q-ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, kann für $q - 1 < \Omega_2$ eine untere Schranke hergeleitet werden. Sei die Zerlegung von

$$R = A_0 + A_1 z + \cdots + A_q z^q, \quad A = \max(|A_0|, |A_1|, \ldots, |A_q|) \geqq 1$$

in primitive Faktoren gegeben durch

$$R = \prod_{\tau=1}^{p} R^{(\tau)}, \qquad R^{(\tau)} = \sum_{k=0}^{q_\tau} A_k^{(\tau)} z^k,$$

und möge

$$A^{(\tau)} = \max(|A_0^{(\tau)}|, |A_1^{(\tau)}|, \ldots, |A_{q_\tau}^{(\tau)}|) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p),$$

sein; die Zahlen

$$A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(p)}$$

sind gewiß alle mindestens gleich 1. Nach einem Hilfssatz von Siegel genügen sie den Ungleichungen [4])

$$A^{(\tau)} \leqq c\,A, \qquad c = q! \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p).$$

Sind jetzt $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(p)}$ p positive Zahlen mit

$$\lambda^{(\tau)} > \frac{q^{(\tau)}\,(2\,q^{(\tau)} - 1)\,(\varrho - 1)\,(\Omega_1 + 1)}{\Omega_2 - q^{(\tau)} + 1} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p)$$

und bedeuten ferner $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \ldots, \Lambda^{(p)}$ gewisse positive Konstante, die einzeln wohl von $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(p)}$, nicht aber von den Koeffizienten der Formen $R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots, R^{(p)}$ und R abhängen, so ist

$$|R^{(\tau)}| \geqq \Lambda^{(\tau)}\,A^{(\tau)-\lambda^{(\tau)}} \geqq c^{-\lambda^{(\tau)}}\,\Lambda^{(\tau)}\,A^{-\lambda^{(\tau)}} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p)$$

und daher

$$|R| \geqq \Lambda_0\,A^{-\lambda^{(1)}-\lambda^{(2)}-\cdots-\lambda^{(p)}},$$

wo die positive Konstante Λ_0 wohl von den Zahlen $\lambda^{(\tau)}$, nicht aber von den Koeffizienten der Näherungsform R abhängt.

Sei zunächst R genau vom Grad q in z angenommen, also

$$\sum_{\tau=1}^{p} q^{(\tau)} = q\,.$$

Dann ist auch

$$\sum_{\tau=1}^{p} q^{(\tau)^2} \leqq q^2$$

und folglich

$$\sum_{\tau=1}^{p} q^{(\tau)}\,(2\,q^{(\tau)} - 1) = 2\sum_{\tau=1}^{p} q^{(\tau)^2} - q \leqq 2q^2 - q = q\,(2\,q - 1).$$

Somit besteht die Ungleichung

$$\sum_{\tau=1}^{p} \frac{q^{(\tau)}\,(2\,q^{(\tau)} - 1)\,(\varrho - 1)\,(\Omega_1 + 1)}{\Omega_2 - q^{(\tau)} + 1} \leqq \sum_{\tau=1}^{p} \frac{q^{(\tau)}\,(2\,q^{(\tau)} - 1)\,(\varrho - 1)\,(\Omega_1 + 1)}{\Omega_2 - q + 1} \leqq \frac{q(2\,q - 1)\,(\varrho - 1)\,(\Omega_1 + 1)}{\Omega_2 - q + 1}.$$

Weil die rechte Seite mit abnehmendem q selbst abnimmt, so muß diese Ungleichung bestehen bleiben, wenn die Form R nur noch höchstens vom Grad q ist. Ist folglich λ eine beliebige positive Zahl größer als

$$\frac{q\,(2\,q - 1)\,(\varrho - 1)\,(\Omega_1 + 1)}{\Omega_2 - q + 1},$$

so kann sie immer in der Form

$$\lambda = \sum_{\tau=1}^{p} \lambda^{(\tau)}, \qquad \lambda^{(\tau)} > \frac{q^{(\tau)}\,(2\,q^{(\tau)} - 1)\,(\varrho - 1)\,(\Omega_1 + 1)}{\Omega_2 - q^{(\tau)} + 1} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p)$$

zerlegt werden.

Damit ist folgender Satz bewiesen [5]):

---

[4]) Siehe die Arbeit: C. Siegel, Approximation algebraischer Zahlen, Math. Zeitschr. **10** (1921), S. 176, Hilfssatz III.

[5]) Nach einer Mitteilung von Herrn Siegel läßt sich für λ_0 ein besserer Wert mittels eines anderen Beweisansatzes erhalten. Für die Zwecke der vorliegenden Arbeit genügt jedoch Satz 4.

Satz 4. *Von der Zahl z werde angenommen, daß sich zu ihr eine natürliche Zahl* ϱ, *eine Zahl* $C > 1$ *und zwei positive Zahlen* Ω_1 *und* Ω_2 *mit* $\Omega_1 > \Omega_2$ *angeben lassen, daß zu jeder genügend großen natürlichen Zahl m dann* ϱ *ganze rationale Zahlen* $a_0, a_1, \ldots, a_{\varrho-1}$ *existieren, die den Ungleichungen*

$$0 < \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{\varrho-1}|) \leqq C^m,$$

$$C^{-m\Omega_1} \leqq \left|\sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l z^l\right| \leqq C^{-m\Omega_2}$$

genügen. Wenn alsdann die positive Zahl λ_0 *der Ungleichung*

$$\lambda_0 > \frac{q(2q-1)(\varrho-1)(\Omega_1+1)}{\Omega_2 - q + 1}$$

genügt, so läßt sich zu ihr eine positive Konstante Λ_0 *angeben, so daß jede Näherungsform*

$$R = A_0 + A_1 z + \cdots + A_q z^q, \qquad A = \max(|A_0|, |A_1|, \ldots, |A_q|) \geqq 1$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten, die nicht gleichzeitig verschwinden, und die von einem Grad

$$q < \Omega_2 + 1$$

ist, der Ungleichung

$$|R| \geqq \Lambda_0 A^{-\lambda_0}$$

genügt.

Nach den Definitionen in 1. ist also speziell

$$\mu(z) \geqq \Omega_2 + 1 .$$

22. Satz 4 werde nun auf den reellen Logarithmus $\log \zeta$ positiver rationaler Zahlen und auf die Zahl $2\pi i$ angewandt. Da in beiden Fällen Ω_2 beliebig groß sein kann, so handelt es sich keinmal um U-Zahlen, sondern $\log \zeta$ und $2\pi i$ müssen entweder S-Zahlen oder T-Zahlen sein; insbesondere kann also zwischen ihnen und einer Liouville-Zahl keine algebraische Gleichung mit algebraischen Koeffizienten bestehen. Darüber hinaus lassen sich untere Schranken für die Annäherungen an beide Zahlen angeben:

In beiden Fällen waren Ω_1 und Ω_2 als Funktion von ϱ in der Form

$$\Omega_1 = a \log \varrho + O(1), \qquad \Omega_2 = a \log \varrho + O(1)$$

darstellbar, wo a eine gewisse positive Zahl bedeutet. Zu der gegebenen natürlichen Zahl q kann eine natürliche Zahl ϱ so bestimmt werden, daß

$$\Omega_2 - 1 \leqq q < \Omega_2$$

und folglich

$$\Omega_2 - q + 1 > 1$$

ist. Dann wird

$$\varrho = O(e^{\frac{q}{a}})$$

und

$$\frac{q(2q-1)(\varrho-1)(\Omega_1+1)}{\Omega_2 - q + 1} = O(q^3 e^{\frac{q}{a}}) .$$

Es gibt also eine positive Konstante $c > 1$, so daß für alle q

$$\lambda_0 \leqq c^q$$

angenommen werden kann; damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 5. *Bedeute $z \neq 0$ entweder den reellen Logarithmus einer positiven rationalen Zahl oder die Zahl $2\pi i$. Dann gibt es hierzu eine positive Konstante $c > 1$ und zu jeder natürlichen Zahl q eine weitere positive Konstante $C(q)$, so daß jede Näherungsform*

$$R = A_0 + A_1 z + \cdots + A_q z^q, \qquad A = \max(|A_0|, |A_1|, \ldots, |A_q|) \geqq 1$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, der Ungleichung

$$|R| \geqq C(q)\, A^{-c^q}$$

genügt.

Eine ganz entsprechende Ungleichung muß auch noch gelten, wenn statt $2\pi i$ die Zahl π selbst genommen wird, wie sofort aus 2. folgt. Ferner lassen sich entsprechende Ungleichungen für die Logarithmen aller algebraischen Zahlen aufstellen.

Die Ungleichung in Satz 5 kann noch etwas verschärft werden. So z. B. kann bei $z = 2\pi i$ gezeigt werden, daß die Zahl c für genügend großes q mit einer beliebigen Zahl größer als $2e$ gleichgesetzt werden darf.

Göttingen, 15. November 1930.

Eingegangen 5. Januar 1931.