Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Herausgegeben von K. Hensel, H. Hasse, L. Schlesinger.
Druck und Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10.

Sonderabdruck aus Band 169 Heft 1. 1932.

Ein Beweis der Transzendenz der P-adischen Exponentialfunktion.

Von *Kurt Mahler* in Göttingen.

In dieser Note wird gezeigt, daß die P-adische Exponentialfunktion

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots,$$

die bekanntlich für alle durch P bzw. für $P = 2$ durch P^2 teilbaren P-adischen Zahlen existiert, an jeder algebraischen P-adischen Stelle $z \neq 0$ im Existenzgebiet eine transzendente P-adische Zahl darstellt.

Das Beweisverfahren stützt sich auf einige Eigenschaften von e^z, die durch die Sonderheiten des P-adischen Zahlkörpers und seine nichtarchimedische Bewertung bedingt sind. Eine einfache formale Übertragung der klassischen Transzendenzbeweise für die gewöhnliche Exponentialfunktion ist anscheinend nicht möglich, da die P-adische Funktion nur noch eine beschränkt konvergente Reihe hat.

1. Sei ϱ eine feste, m eine über alle Grenzen wachsende natürliche Zahl. Setzt man

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{e^{z\vartheta}\, d\vartheta}{\prod_{h=0}^{m} (\vartheta + k - h)^{\varrho}}, \quad R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{e^{z\vartheta}\, d\vartheta}{\prod_{h=0}^{m} (\vartheta - h)^{\varrho}},$$

wobei C_0 einen sehr kleinen, C_∞ einen sehr großen Kreis um den Nullpunkt mit positivem Richtungssinn bedeutet, so besteht die Identität

$$\sum_{k=0}^{m} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) e^{kz} = R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right).$$

Die Ausdrücke $A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ sind Polynome in z vom Grad $\varrho - 1$; man hat für sie die abbrechenden Potenzreihen

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{l=0}^{\varrho-1} \frac{z^l}{l!} A_k^{(l)}\left(\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

mit den Koeffizienten

$$A_k^{(l)}\left(\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\vartheta^{l-\varrho}\, d\vartheta}{\prod_{\substack{h=0 \\ h \neq k}}^{m} (\vartheta + k - h)^{\varrho}}.$$

Der Charakter dieser Koeffizienten kann auf einfache Weise untersucht werden [1]; es zeigt sich, daß die Größen

$$\mathsf{A}_k^{(l)}\left(\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = m!^{\varrho} D_m^{\varrho} \frac{(\varrho - 1)!}{l!} A_k^{(l)}\left(\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

[1]) Siehe S. 138 meiner Arbeit „Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, II", Journal f. d. r. u. ang. Mathematik **166** (1932).

ganz rational sind und daß gleichmäßig in den Indizes k, l, ϱ für großes m die Ungleichung

$$\left| \mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} \right| \leqq (3e)^{m\varrho}$$

besteht. Dabei bedeutet

$$D_m = \{1, 2, \ldots, m\}$$

das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $1, 2, \ldots, m$.

Wir führen noch die Abkürzungen

$$F\left(z, w \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{\varrho-1} \mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} z^l w^k,$$

$$r\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = m!^{\varrho} D_m^{\varrho} (\varrho - 1)!\, R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

ein; alsdann besteht die Identität

$$F\left(z, e^z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = r\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right).$$

2. Von jetzt ab gehen wir zum Körper der P-adischen Zahlen K über, wobei P eine feste Primzahl bedeutet. Den P-adischen Wert einer Zahl α aus K bezeichnen wir mit $|\alpha|_P$ zum Unterschied vom gewöhnlichen Absolutbetrag. Eine P-adische Zahl α heiße wie üblich algebraisch, wenn es ein irreduzibles Polynom

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n \not\equiv 0$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten und mindestens vom ersten Grad gibt, dessen Nullstelle α ist; gibt es kein solches Polynom, so heiße α transzendent.

Seien z und w zwei algebraische P-adische Zahlen. Dann gibt es einen kleinsten algebraischen Körper über dem Körper R der rationalen Zahlen, in dem gleichzeitig z und w liegen. Er heiße $R(s)$, sei vom Grad n über R und werde etwa durch die ganze algebraische P-adische Zahl s erzeugt. In s lassen sich z und w ausdrücken in der Gestalt

$$z = \frac{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1}}{a_n},$$

$$w = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-1} s^{n-1}}{b_n},$$

wobei $a_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$ und die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ ganz rational sind. Sei zur Abkürzung

$$a = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|), \qquad b = \max(|b_0|, |b_1|, \ldots, |b_n|).$$

Offenbar läßt sich die ganze P-adische Zahl

$$G\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = a_n^{\varrho-1} b_n^m F\left(z, w \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

als ein Polynom in s mit ganzen rationalen Koeffizienten vom Grad

$$(n-1)(m+\varrho-1)$$

darstellen. Wird bei festem ϱ der Index m genügend groß gewählt, so ist nach **1** aber

$$\left| \mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} \right| \leqq (3e)^{m\varrho}$$

und $\mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho}$ ganz rational. Offenbar erhält man die Majorante

$$G\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \ll (3e)^{m\varrho} a^{\varrho-1} b^m \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{\varrho-1} (1 + s + \cdots + s^{n-1})^{k+l}.$$

Jetzt ist

$$\sum_{k=0}^{m}(1+s+\cdots+s^{n-1})^k \ll (2+s+\cdots+s^{n-1})^m,$$

$$\sum_{l=0}^{\varrho-1}(1+s+\cdots+s^{n-1})^l \ll (2+s+\cdots+s^{n-1})^{\varrho-1},$$

also $$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{\varrho-1}(1+s+\cdots+s^{n-1})^{k+l} \ll (2+s+\cdots+s^{n-1})^{m+\varrho-1}$$

$$\ll (n+1)^{m+\varrho-1}(1+s+s^2+\cdots+s^{(n-1)(m+\varrho-1)}),$$

und damit haben wir folgende Majorante erhalten:

$$G\left(s\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) \ll (3e)^{m\varrho}a^{\varrho-1}b^m(n+1)^{m+\varrho-1}(1+s+\cdots+s^{(n-1)(m+\varrho-1)}).$$

Genüge nun s der irreduziblen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten

$$g(s) \equiv g_0+g_1s+\cdots+g_ns^n=0.$$

Nach Annahme darf $g_n=1$ vorausgesetzt werden; sei ferner

$$g=\max(|g_0|,|g_1|,\ldots,|g_n|).$$

Wird das Polynom $G\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)$ durch $g(x)$ dividiert, so erhält man

$$G\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)=H_0\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)g(x)+H^*\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right),$$

wobei $H_0\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)$ in x höchstens vom Grad $(n-1)(m+\varrho-1)-n$, $H^*\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)$ hierin höchstens vom Grad $n-1$ ist und beide Polynome ganze rationale Koeffizienten haben. Sei insbesondere

$$H^*\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)=H_0+H_1x+\cdots+H_{n-1}x^{n-1},\quad H=\max(|H_0|,|H_1|,\ldots,|H_{n-1}|);$$

nach einem einfachen Hilfssatz ist [2])

$$H \leqq (3e)^{m\varrho}a^{\varrho-1}b^m(n+1)^{m+\varrho-1}(2g)^{(n-1)(m+\varrho-1)-n+1}.$$

Wegen $g(s)=0$ besteht offenbar die Gleichung

$$G\left(s\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)=H^*\left(s\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right).$$

Es ist also zulässig, statt $G\left(s\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)$ weiter die Zahlen $H^*\left(s\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)$ zu betrachten. Dabei wollen wir diejenigen hiervon unbeachtet lassen, die etwa verschwinden sollten.

Da die Zahl $H^*\left(s\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)$ also ungleich Null ist, so können die Koeffizienten dieses Polynoms in s nicht alle verschwinden. Das Polynom $g(x)$ ist von höherem Grad in x als $H^*\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)$ und irreduzibel, daher hierzu teilerfremd. Die Resultante dieser beiden Polynome

$$D=\begin{vmatrix}
g_0 & g_1 & \cdots & g_n & & & \\
 & g_0 & g_1 & \cdots & g_n & & \\
 & & \ddots & & & \ddots & \\
H_0 & H_1 & \cdots & H_{n-1} & & & \\
 & H_0 & H_1 & \cdots & H_{n-1} & & \\
 & & \ddots & & & \ddots &
\end{vmatrix}$$

[2]) Siehe Hilfssatz 1 meiner Arbeit „Zur Approximation algebraischer Zahlen, I", die demnächst in den Math. Annalen erscheint.

ist folglich eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl; man erhält für sie leicht die obere Schranke

$$|D| \leqq (2n-1)!\, g^{n-1} \left((3e)^{m\varrho}\, a^{\varrho-1}\, b^m\, (n+1)^{m+\varrho-1}\, (2g)^{(n-1)(m+\varrho-2)}\right)^n.$$

Jetzt gibt es aber nach bekannten Sätzen über Elimination zwei Polynome $\gamma(x)$ und $\mathsf{H}(x)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten, so daß identisch

$$\gamma(x)\, g(x) + \mathsf{H}(x) H^*\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = D$$

ist, folglich für $x = s$

$$H^*\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{D}{\mathsf{H}(s)}.$$

Auf der rechten Seite ist der Zähler eine nichtverschwindende ganze rationale Zahl, so daß

$$|D|_P \geqq |D|^{-1} \geqq \left((2n-1)!\, g^{n-1}\right)^{-1} \left((3e)^{m\varrho}\, a^{\varrho-1}\, b^m\, (n+1)^{m+\varrho-1}\, (2g)^{(n-1)(m+\varrho-2)}\right)^{-n}$$

ist. Im Nenner steht ein Polynom in der ganzen P-adischen Zahl s mit ganzen rationalen Koeffizienten; da der Nenner nicht Null sein kann, ist also

$$\left|\frac{1}{\mathsf{H}(s)}\right|_P \geqq 1.$$

Damit sind wir zu folgender Abschätzung gekommen:

$$\left|G\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\right|_P = \left|H^*\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\right|_P$$
$$\geqq \left((2n-1)!\, g^{n-1}\right)^{-1} \left((3e)^{m\varrho}\, a^{\varrho-1}\, b^m\, (n+1)^{m+\varrho-1}\, (2g)^{(n-1)(m+\varrho-2)}\right)^{-n}.$$

Die rechte Seite kann noch auf eine etwas bequemere Gestalt gebracht werden. Offenbar ist für jede genügend große feste natürliche Zahl ϱ und für über alle Grenzen wachsende natürliche Zahlen m

$$(2n-1)!\, g^{n-1}\, a^{(\varrho-1)n}\, b^{mn}\, (n+1)^{(m+\varrho-1)n}\, (2g)^{(n-1)(m+\varrho-2)n} \leqq \left(\frac{4}{3}\right)^{mn\varrho}.$$

Es folgt daraus

Hilfssatz 1: *Wird* $\varrho \geqq \varrho_0(z, w)$ *und* $m \geqq m_0(z, w, \varrho)$ *angenommen, so verschwindet entweder* $G\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ *oder ist eine von Null verschiedene ganze P-adische Zahl mit*

$$\left|G\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\right|_P \geqq (4e)^{-mn\varrho}.$$

3. Von jetzt ab nehmen wir an, daß ϱ die Gestalt

$$\varrho = P^r + 1$$

hat, wobei r eine ganze rationale nichtnegative Zahl bedeutet. Ist dann

$$\varphi = \varphi(P^r + 1),$$

so besteht nach dem kleinen Fermatschen Satz die Kongruenz

$$P^\varphi \equiv 1 (\varrho).$$

Setzt man

$$m + 1 = \frac{P^{r+\mu\varphi} + 1}{P^r + 1},$$

wobei auch μ eine nichtnegative ganze rationale Zahl bedeutet, so ist offenbar die Zahl

$$(m+1)\varrho - 1 = P^{r+\mu\varphi}$$

eine reine Potenz von P.

Es soll eine obere Schranke für den P-adischen Wert der Zahl

$$\mathfrak{R}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = a_n^{\varrho-1}\, b_n^m\, r\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = m!^\varrho\, D_m^\varrho\, (\varrho-1)!\, a_n^{\varrho-1}\, b_n^m\, R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

abgeleitet werden; dabei wollen wir aber annehmen, daß z nicht verschwindet und die Ungleichung

$$0 < |z|_P = P^{-f} \leqq P^{-3}$$

erfüllt.

Nach **1** ist

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{e^{z\vartheta}\, d\vartheta}{\prod_{h=0}^{m} (\vartheta - h)^\varrho}.$$

Entwickelt man den Integranden in der Umgebung des unendlich fernen Punktes in eine Laurentreihe und wendet alsdann den Residuensatz an, indem man C_∞ auf den Punkt $\vartheta = \omega$ zusammenzieht, so erhält man die Potenzreihe

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{z^{(m+1)\varrho-1}}{((m+1)\varrho-1)!}\Big(1 + \frac{c_1 z}{(m+1)\varrho} + \frac{c_2 z^2}{((m+1)\varrho)\,((m+1)\varrho+1)} + \frac{c_3 z^3}{((m+1)\varrho)\,((m+1)\varrho+1)\,((m+1)\varrho+2)} + \cdots\Big),$$

wobei $c_1, c_2, c_3, \ldots$ gewisse ganze rationale Zahlen bedeuten. Hieraus folgt

$$\Re\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = m!^\varrho D_m^\varrho (\varrho-1)!\, a_n^{\varrho-1} b_n^m \frac{z^{(m+1)\varrho-1}}{((m+1)\varrho-1)!}\, \mathfrak{r}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

mit der Abkürzung

$$\mathfrak{r}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = 1 + \frac{c_1 z}{(m+1)\varrho} + \frac{c_2 z^2}{((m+1)\varrho)\,((m+1)\varrho+1)} + \cdots.$$

Nach bekannten Sätzen ist für jede nichtnegative ganze rationale Zahl h

$$|h!|_P = P^{-\left(\left[\frac{h}{P}\right] + \left[\frac{h}{P^2}\right] + \cdots\right)}.$$

Wegen

$$(m+1)\varrho - 1 = P^{r+\mu\varphi}$$

folgt hieraus erstens die Gleichung

$$|((m+1)\varrho-1)!|_P = P^{-(P^{r+\mu\varphi-1} + P^{r+\mu\varphi-2} + \cdots + 1)} = P^{-\frac{P^{r+\mu\varphi}-1}{P-1}} = P^{-\frac{(m+1)\varrho-2}{P-1}}.$$

Zweitens ist für jede nichtnegative ganze rationale Zahl h

$$|((m+1)\varrho+h-1)!|_P = P^{-\left(\left[\frac{(m+1)\varrho+h-1}{P}\right] + \left[\frac{(m+1)\varrho+h-1}{P^2}\right] + \cdots\right)}$$
$$\geqq P^{-\left(\frac{(m+1)\varrho+h-1}{P} + \frac{(m+1)\varrho+h-1}{P^2} + \cdots\right)} = P^{-\frac{(m+1)\varrho+h-1}{P-1}}$$

und daher für $h \geqq 1$ wegen $P \geqq 2$

$$\left|\frac{c_h z^h}{((m+1)\varrho)\,((m+1)\varrho+1)\cdots((m+1)\varrho+h-1)}\right|_P$$
$$\leqq P^{\frac{(m+1)\varrho+h-1}{P-1} - \frac{(m+1)\varrho-2}{P-1} - hf} \leqq P^{h+1-3h} = P^{-2h+1} \leqq P^{-h} < 1.$$

In der Potenzreihe

$$\mathfrak{r}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = 1 + \frac{c_1 z}{(m+1)\varrho} + \frac{c_2 z^2}{((m+1)\varrho)\,((m+1)\varrho+1)} + \cdots$$

streben also die Summanden gegen Null; alle von ihnen außer dem ersten haben einen P-adischen Wert kleiner als eins. Daraus folgt

$$\left|\mathfrak{r}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\right|_P = 1 \quad \text{und} \quad \left|\Re\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\right|_P = \left|m!^\varrho D_m^\varrho (\varrho-1)!\, a_n^{\varrho-1} b_n^m \frac{z^{(m+1)\varrho-1}}{((m+1)\varrho-1)!}\right|_P \neq 0,$$

wegen

$$0 < |D_m^{\varrho}(\varrho-1)!\, a_n^{\varrho-1} b_n^{\varrho}|_P \leqq 1,$$

also

$$0 < \left|\Re\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\right|_P \leqq \left|\frac{m!^{\varrho}}{((m+1)\varrho-1)!}\, z^{(m+1)\varrho-1}\right|_P.$$

Wendet man noch einmal die Formel für den P-adischen Wert der Fakultäten an, so erhält man

$$|m!|_P = P^{-\left(\left[\frac{m}{P}\right]+\left[\frac{m}{P^2}\right]+\cdots\right)} \leqq P^{-\left(\frac{m}{P-1}-\frac{\log m}{\log P}-1\right)},$$

also

$$\left|\frac{m!^{\varrho}}{((m+1)\varrho-1)!}\right|_P \leqq P^{\frac{(m+1)\varrho-2}{P-1}-\varrho\left(\frac{m}{P-1}-\frac{\log m}{\log P}-1\right)} = P^{\frac{\varrho-2}{P-1}+\varrho\frac{\log m}{\log P}+\varrho}$$

und damit schließlich die Abschätzung

$$0 < \left|\Re\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\right|_P \leqq P^{\frac{\varrho-2}{P-1}+\varrho\frac{\log m}{\log P}+\varrho}\, P^{-((m+1)\varrho-1)f}.$$

Ihr entnimmt man bei festem ϱ für genügend großes m den

Hilfssatz 2: *Sind die beiden natürlichen Zahlen ϱ und m von der speziellen Gestalt*

$$\varrho = P^r + 1, \quad m+1 = \frac{P^{r+\mu\varphi}+1}{P^r+1}$$

und ist $\varrho \geqq \varrho_1(z)$, $m \geqq m_1(z,\varrho)$, $|z|_P = P^{-f}$ mit $f \geqq 3$, so ist

$$0 < \left|\Re\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\right|_P \leqq P^{-\frac{m\varrho f}{2}} = |z|_P^{\frac{m\varrho}{2}}.$$

4. **Lehrsatz:** *Ist ζ eine P-adische Zahl mit*

$$0 < |\zeta|_P < \tfrac{1}{2} \quad \text{für} \quad P = 2, \qquad 0 < |\zeta|_P < 1 \quad \text{für} \quad P \geqq 3,$$

so ist höchstens eine der beiden Zahlen ζ und e^{ζ} algebraisch.

Beweis: Es genügt offenbar zu zeigen, daß für eine beliebige natürliche Zahl n die beiden Zahlen ζ und e^{ζ} nicht gleichzeitig in einem algebraischen Zahlkörper n-ten Grades liegen können.

Wir bestimmen eine natürliche Zahl λ, so daß

$$P^{-\lambda} < (4e)^{-2n}$$

ist, und setzen

$$z = P^{\lambda}\zeta.$$

Liegen dann ζ und e^{ζ} in einem algebraischen Zahlkörper n-ten Grades, so offenbar auch z und $e^z = w$. Jetzt besteht die Identität

$$G\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \Re\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right),$$

wo s zu z und w nach 2 bestimmt ist. Auf der rechten Seite ist nach Hilfssatz 2 für unendlich viele Paare ϱ, m beliebig großer natürlicher Zahlen

$$0 < \left|\Re\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\right|_P \leqq |z|_P^{\frac{m\varrho}{2}} < P^{-\frac{m\varrho\lambda}{2}} < (4e)^{-mn\varrho}.$$

Die linke Seite kann für diese Paare also auch nicht verschwinden; nach Hilfssatz 1 ist daher

$$\left|G\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\right|_P \geqq (4e)^{-mn\varrho},$$

und damit sind wir zu dem gewünschten Widerspruch gelangt.

Göttingen, 1. 2. 1932.

Eingegangen 6. Februar 1932.