ZUR APPROXIMATION P-ADISCHER IRRATIONALZAHLEN.

VON

KURT MAHLER

in Manchester.

Bekanntlich kann man jede reelle Irrationalzahl in einen unendlichen Kettenbruch

$$\zeta = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3} + \cdots$$

entwickeln; dazu braucht man nur der Reihe nach die Zahlen

$$a_0 = [\zeta],\ \zeta_1 = \frac{1}{\zeta - a_0};\ a_1 = [\zeta_1],\ \zeta_2 = \frac{1}{\zeta_1 - a_1};$$

$$a_2 = [\zeta_2],\ \zeta_3 = \frac{1}{\zeta_2 - a_2};\ \ldots$$

zu bestimmen. Dieses Verfahren lässt sich sinngemäss auf P-adische Irrationalzahlen übertragen. Alsdann ist es nur nötig, jetzt unter $[\alpha]$ diejenige arithmetische Funktion der P-adischen Zahl α zu verstehen, die durch die Bedingungen

$$[\alpha] = 0 \text{ für } |\alpha|_P < 1;$$

$$[\alpha] = \frac{g}{P^f} \text{ für } |\alpha|_P = P^f \text{ mit } f \geqq 0,$$

$$g \text{ ganz rational, } 0 \leqq g \leqq P^{f+1} - 1,\ \left|\alpha - \frac{g}{P^f}\right|_P < 1,$$

definiert ist. Der so bestimmte Kettenbruch für ζ ist nunmehr P-adisch konvergent mit dem Grenzwert ζ. Bildet man seine Näherungsbrüche p_n/q_n und denkt dieselben mit einer solchen Potenz von P erweitert, dass ihre Zähler und Nenner ganz werden, so zeigt sich, dass die Ungleichungen

$$| p_n - q_n\zeta |_P \leqq \frac{c^n}{| p_n, q_n | \, | p_{n+1}, q_{n+1} |},$$

$$\left(| p_n, q_n | = \max (| p_n |, | q_n |) \right)$$

bestehen, mit einer positiven Konstanten $c > 1$, die nur von P abhängt. *Im Gegensatz zum reellen Fall kommt man also zu einer um so unschärferen Abschätzung, je grösser der Index des Näherungsbruches ist.*

Es liegt deshalb nahe, nach anderen Kettenbrüchen für ζ zu suchen, deren Näherungsbrüche p_n/q_n die Zahl ζ so approximieren, so dass

$$| p_n - q_n\zeta |_P \leqq \frac{C}{| p_n, q_n | \, | p_{n+1}, q_{n+1} |} \qquad (C > 0 \text{ konstant})$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten wird. Dass solche Kettenbrüche existieren, wird in dieser Arbeit gezeigt. Es wird dort bewiesen, dass jede P-adische Irrationalzahl ζ, für die der Einfachheit halber $| \zeta |_P = 1$ sei, sich in einen Kettenbruch der Form

$$\zeta = \frac{e_0 P^{\alpha_0+1} |}{| \ c_0} + \frac{d_0 e_1 P^{\alpha_1+2} |}{| \ c_1} + \frac{d_1 e_2 P^{\alpha_2+2} |}{| \ c_2} + \frac{d_2 e_3 P^{\alpha_3+2} |}{| \ c_3} + \cdots$$

entwickeln lässt. Dabei sind

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots; \ c_0, c_1, c_2, \ldots; \ d_0, d_1, d_2, \ldots; \ e_0, e_1, e_2, \ldots$$

ganze rationale Zahlen, von denen die α nichtnegativ, die d und e aber teilerfremd zu P und absolut höchstens gleich $2\sqrt{P}$ sind; ferner ist

$$| c_n | \leqq 2\sqrt{P} \, | e_n | \, P^{\alpha_n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die zu diesem Kettenbruch gebildeten Näherungen p_n/q_n genügen den Ungleichungen

$$| p_n - q_n\zeta |_P \leqq \frac{\sqrt{P}}{| p_n, q_n | \, | p_{n+1}, q_{n+1} |},$$

die also wirklich die verlangte Form haben.

Der Beweis verläuft insofern auf einem Umweg, als zuerst *die Näherungsbrüche und erst aus ihnen der Kettenbruch gewonnen wird.* Das Verfahren geht dabei auf Gedanken zurück, die im reellen Fall schon von Dirichlet stammen. Im Text wird Gebrauch gemacht vom Minkowskischen Linearformen-Satz; genau so gut hätte man auch das Schachtelprinzip verwenden können.

§ 1. *Die Existenz der Näherungen.*

1.) Im Folgenden bedeute P eine feste Primzahl, ζ eine ganze irrationale P-adische Zahl; es ist also

$$|\zeta|_P \leqq 1,$$

und es gibt keine zwei ganzen rationalen Zahlen p und q, die nicht beide verschwinden, so dass

$$p - q\zeta = 0$$

ist.

Sei h irgend eine natürliche Zahl und alsdann ζ_h der h-te Abschnitt von ζ, d.h. diejenige ganze rationale Zahl mit

$$0 \leqq \zeta_h \leqq P^h - 1, \qquad |\zeta_h - \zeta|_P \leqq P^{-h}.$$

Auf die drei Linearformen

$$L_1(p, q, r) = p, \ L_2(p, q, r) = q, \ L_3(p, q, r) = p - q\zeta_h + rP^h,$$

welche ganze rationale Koeffizienten und die Determinante P^h besitzen, lässt sich der Minkowskische Linearformen-Satz anwenden. Er ergibt die Existenz von drei ganzen rationalen Zahlen p, q, r, die nicht alle zugleich verschwinden und den Ungleichungen

$$|L_1(p, q, r)| \leqq P^{\frac{h}{2}}, \ |L_2(p, q, r)| \leqq P^{\frac{h}{2}}, \quad |L_3(p, q, r)| < 1$$

genügen. Die letzte dieser drei Ungleichungen kann nur befriedigt sein, wenn sogar

$$L_3(p, q, r) = p - q\zeta_h + rP^h = 0$$

ist. Daraus folgt erstens, dass auch p und q nicht beide gleich Null sind, zweitens die Ungleichung

$$|p - q\zeta_h|_P \leqq P^{-h}$$

und also auch die Ungleichung

$$| p - q\zeta |_P = |(p - q\zeta_h) + q(\zeta_h - \zeta)|_P \leqq$$
$$\leqq \max (| p - q\zeta_h |_P, | \zeta_h - \zeta |_P) \leqq P^{-h},$$

so dass damit das folgende Ergebnis bewiesen ist:

Satz 1: Zu jeder natürlichen Zahl h gibt es zwei ganze rationale Zahlen p und q, die nicht beide verschwinden und den drei Ungleichungen

$$\left.\begin{aligned} | p - q\zeta |_P \leqq P^{-h}, \quad | p, q | = \max (| p |, | q |) \leqq P^{\frac{h}{2}}, \\ E(p, q) = | p, q | \, | p - q\zeta |_P \leqq P^{\frac{h}{2}} P^{-h} = P^{-\frac{h}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

genügen.

2.) Unter den Lösungen von (1) muss eine vorhanden sein, für die

$$E(p, q) = | p, q | \, | p - q\zeta |_P \leqq P^{-\frac{h}{2}}$$

möglichst klein ist. Diese Lösung p, q werde irgendwie ausgewählt und heisse das zu h gehörige Lösungspaar. Es ist leicht einzusehen, dass seine beiden Zahlen p und q nicht gleichzeitig durch eine von P verschiedene Primzahl teilbar sein können. Denn ginge etwa die Primzahl $P^* \neq P$ in p und q auf, so genügte das Paar

$$p^* = \frac{p}{P^*}, \quad q^* = \frac{q}{P^*}$$

gleichfalls den Bedingungen (1); es wäre aber

$$E(p, q) = P^* E(p^*, q^*) > E(p^*, q^*),$$

entgegen der gemachten Minimalannahme. Dagegen ist natürlich durchaus möglich, dass p und q gleichzeitig durch P teilbar sind.

Da nach Voraussetzung ζ irrational ist, so folgt noch, dass für jedes Lösungspaar p, q

$$| p - q\zeta |_P > 0 \text{ und } E(p, q^*) > 0$$

sein muss.

§ 2. *Beziehungen zwischen zwei auf einander folgenden Näherungen.*

3.) Da nach der letzten Bemerkung $\mathrm{E}(p, q)$ nicht verschwindet, so gibt es eine natürliche Zahl $h' > h$ mit

$$\mathrm{P}^{-\frac{h'}{2}} < \mathrm{E}(p, q) \leqq \mathrm{P}^{-\frac{h'-1}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Sei alsdann $h^* \geqq h'$ eine beliebige natürliche Zahl und p^* und q^* ein zu h^* gehöriges Lösungspaar.

Wegen (2) und

$$\mathrm{E}(p^*, q^*) \leqq \mathrm{P}^{-\frac{h^*}{2}} \leqq \mathrm{P}^{-\frac{h'}{2}}$$

muss dann erstens

$$\mathrm{E}(p^*, q^*) < \mathrm{E}(p, q) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

sein. Zweitens gilt

$$|\, p^*, q^* \,| > \mathrm{P}^{\frac{h}{2}} \geqq |\, p, q \,|, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

denn andernfalls wäre auch p^*, q^* ein zu h gehöriges Lösungspaar, was der an p, q gestellten Minimalbedingung widerspricht. Drittens ist

$$|\, p^* - q^*\zeta \,|_P < |\, p - q\zeta \,|_P, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

wie ohne weiteres aus (3) und (4) folgt. Das Lösungspaar p^*, q^* approximiert also ζ schärfer als das Paar p, q.

Sei zur Abkürzung

$$\delta = pq^* - p^*q. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Der Wert dieser Determinante ist natürlich ganz rational. Darüber hinaus kann zunächst folgende Aussage gemacht werden:

Satz 2: Die Determinante δ ist ungleich Null.

Denn wäre $\delta = 0$ und demnach

$$\frac{p}{q} = \frac{p^*}{q^*},$$

so gäbe es eine rationale Zahl $r \neq 0$ mit

$$p^* = rp, \quad q^* = rq.$$

Nun ist aber nach 2.) sowohl der grösste gemeinsame Teiler von p und q, als auch der von p^* und q^* eine reine Potenz von P, also auch die Zahl r. Das ergäbe aber

$$\mathrm{E}(p^*, q^*) = \mathrm{E}(p, q),$$

was im Widerspruch zu (3) steht. Somit folgt die Behauptung.

4.) Für den gewöhnlichen Absolutbetrag und für den P-adischen Wert von δ lassen sich weiter folgende Schranken angeben:

$$\frac{1}{|p - q\zeta|_P} \leqq |\delta| \leqq 2\,|p, q|\,|p^*, q^*|, \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\,|p, q|\,|p^*, q^*|} \leqq |\delta|_P \leqq |p - q\zeta|_P, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$1 \leqq |\delta|\,|\delta|_P \leqq 2\,|p^*, q^*|\,\mathrm{E}(p, q) \quad . \quad . \quad (9)$$

In der Tat ist

$$|\delta| \leqq |p|\,|q^*| + |p^*|\,|q| \leqq 2\,|p, q|\,|p^*, q^*|$$

und

$$|\delta|_P = |q^*(p - q\zeta) - q(p^* - q^*\zeta)|_P \leqq$$
$$\leqq \max\left(|p - q\zeta|_P,\ |p^* - q^*\zeta|_P\right) = |p - q\zeta|_P,$$

so dass sich die rechten Hälften der Ungleichungen (7) und (8) und durch Multiplikation auch die rechte Hälfte von (9) ergibt. Die linke Hälfte von (9) folgt weiter daraus, dass δ ganz rational und ungleich Null ist; hieraus aber ergeben sich schliesslich die noch fehlenden Aussagen.

Es ist übrigens nicht schwer, in den rechten Hälften von (7) und (9) und in der linken Hälfte von (8) das Zeichen $\leqq$ durch das Zeichen $<$ zu ersetzen.

5.) Besonders einfach werden die letzten Aussagen, wenn $h^* = h'$ ist und also ein zu h' gehöriges Lösungspaar p', q' betrachtet wird. Ein jedes solches Lösungspaar heisse „Nachfolger" von p, q. Zum Unterschied werde für die Determinante aus einem Paar p, q und seinem Nachfolger p', q'

$$\Delta = pq' - p'q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

geschrieben. Wegen der Definitions-Ungleichungen

$$E(p, q) \leqq \sqrt{P}\, P^{-\frac{h'}{2}}, \quad |\, p', q' \,| \leqq P^{\frac{h'}{2}}$$

wird alsdann

$$E(p, q) \leqq \frac{\sqrt{P}}{|\, p', q' \,|}, \quad |\, p - q\zeta \,|_P \leqq \frac{\sqrt{P}}{|\, p, q \,|\, |\, p', q' \,|},$$

und demnach nehmen die obigen Ungleichungen die elegantere Form an:

$$\frac{|\, p, q \,|\, |\, p', q' \,|}{\sqrt{P}} \leqq |\, \varDelta \,| \leqq 2\, |\, p, q \,|\, |\, p', q' \,|, \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\frac{1}{2\, |\, p, q \,|\, |\, p', q' \,|} \leqq |\, \varDelta \,|_P \leqq \frac{\sqrt{P}}{|\, p, q \,|\, |\, p', q' \,|}, \quad . \quad (12)$$

$$1 \leqq |\, \varDelta \,|\, |\, \varDelta \,|_P \leqq 2\sqrt{P}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Hiervon ist besonders die letzte Ungleichung bemerkenswert; sie zeigt, dass sich die Determinante $\varDelta$ in der Form

$$\varDelta = e\, P^f$$

darstellen lässt, wo f eine geeignete natürliche Zahl, e dagegen eine nicht durch P teilbare ganze rationale Zahl mit

$$1 \leqq |\, e \,| \leqq 2\sqrt{P}$$

ist. Hat die Primzahl P speziell den Wert 2, so muss also wegen

$$2\sqrt{2} < 3$$

die Determinante $\varDelta$ abgesehen vom Vorzeichen eine reine Potenz von P sein.

Der Beweis der vorigen Ungleichungen ergibt als Nebenergebnis die Ungleichung

$$\frac{1}{2\, |\, p, q \,|\, |\, p', q' \,|} \leqq |\, p - q\zeta \,|_P \leqq \frac{\sqrt{P}}{|\, p, q \,|\, |\, p', q' \,|} \quad . \quad (14)$$

durch die der Wert von $|\, p - q\zeta \,|_P$ in sehr genauer Weise nach unten und nach oben abgeschätzt wird.

§ 3. *Beziehungen zwischen drei auf einander folgenden Näherungen.*

6.) Nunmehr sei p, q ein zu h gehöriges Lösungspaar, p', q' ein Nachfolger von p, q, der etwa zu h' mit

$$P^{-\frac{h'}{2}} < E(p, q) \leqq P^{-\frac{h'-1}{2}},$$

und p'', q'' ein Nachfolger von p', q', der etwa zu h'' mit

$$P^{-\frac{h''}{2}} < E(p', q') \leqq P^{-\frac{h''-1}{2}}$$

gehört; ferner sei zur Abkürzung

$$\varDelta = pq' - p'q, \quad \varDelta'' = p'q'' - p''q', \quad \delta = pq'' - p''q. \qquad (15)$$

Da die sämtlichen drei Determinanten.

$$\begin{vmatrix} p & q & p \\ p' & q' & p' \\ p'' & q'' & p'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p & q & q \\ p' & q' & q' \\ p'' & q'' & q'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p & q & p - q\zeta \\ p' & q' & p' - q'\zeta \\ p'' & q'' & p'' - q''\zeta \end{vmatrix}$$

verschwinden, so bestehen die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} p'' &= ap + bp' \\ q'' &= aq + bq' \\ p'' - q''\zeta &= a(p - q\zeta) + b(p' - q'\zeta) \end{aligned}\right\}, \quad a = -\frac{\varDelta'}{\varDelta}, \; b = \frac{\delta}{\varDelta} \qquad (16)$$

Um den Charakter der Koeffizienten a und b näher zu bestimmen, werde auf die Abschätzungen in 4.) und 5.) zurückgegangen. Sie führen zu den folgenden Abschätzungen:

$$\frac{1}{2\sqrt{P}} \frac{|p'', q''|}{|p, q|} \leqq |a| \leqq 2\sqrt{P} \frac{|p'', q''|}{|p, q|}, \quad . \quad . \qquad (17)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{P}} \frac{|p, q|}{|p'', q''|} \leqq |a|_P \leqq 2\sqrt{P} \frac{|p, q|}{|p'', q''|} \quad . \quad . \qquad (18)$$

und

$$\frac{1}{2\sqrt{P}} \leqq |b| \leqq 2\sqrt{P} \frac{|p'', q''|}{|p', q'|}, \quad . \quad . \qquad (19)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{P}} \frac{|p', q'|}{|p'', q''|} \leqq |b|_P \leqq 2\sqrt{P}. \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (20)$$

Für die in ihnen autretenden Grössen $|p, q|$, $|p', q'|$ und $|p'', q''|$ gelten ferner die Ungleichungen

$$|p, q| \leqq \mathrm{P}^{\frac{h}{2}} < |p', q'| \leqq \mathrm{P}^{\frac{h'}{2}} < |p'', q''| \quad (h' \geqq h + 1).$$

Daraus folgt erstens

$$|a|_P < 2, \text{ d.h. } |a|_P \leqq 1,$$

so dass die rationale Zahl a ganz P-adisch ist. Auf Grund der speziellen Gestalt von $\varDelta$ und $\varDelta'$ muss demnach a die Form

$$a = r\mathrm{P}^g$$

haben, mit einer geeigneten natürlichen Zahl g und einem rationalen Faktor $r \neq 0$, dessen Zähler und Nenner teilerfremd zu P und absolut höchstens gleich $2\sqrt{\mathrm{P}}$ sind. Ist insbesondere $\mathrm{P} = 2$, so wird also a abgesehen vom Vorzeichen eine natürliche Potenz von P.

Was zweitens b anbelangt, so lässt sich nur die weniger weitgehende Aussage

$$|b|_P \leqq 2\sqrt{\mathrm{P}}, \text{ d.h. } |b|_P \leqq \mathrm{P}$$

machen, so dass also die rationale Zahl $\mathrm{P}.b$ ganz P-adisch sein muss. Auf Grund der speziellen Form von $\varDelta$ muss b demnach von der Gestalt

$$b = \frac{c}{\mathrm{P} \,.\, d}$$

sein, wobei $c \neq 0$ und $d \neq 0$ zwei ganze rationale Zahlen sind, von denen d zu P teilerfremd und absolut höchstens gleich $2\sqrt{\mathrm{P}}$ ist. Gilt insbesondere $\mathrm{P} = 2$, so muss b ein ganzes rationales Vielfaches von ½ sein.

Aus der Gestalt von a und b als Funktion von $\varDelta$, $\varDelta'$, δ folgt weiter noch, dass der Hauptnenner von a und $\mathrm{P} \,.\, b$ zu P teilerfremd und absolut höchstens gleich $2\sqrt{\mathrm{P}}$ ist. Ferner wird

$$\left|\frac{b}{a}\right| \leqq 2\sqrt{\mathrm{P}}\,\frac{|p, q|}{|p', q'|}$$

und erst recht

$$|b| < 2\sqrt{P}\,|a| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (21)$$

Die Zahl b ist also höchstens von derselben Grössenordnung wie a.

§ 4. *Der Kettenbruch für ζ.*

7.) Die bisherigen Ergebnisse erlauben zu zeigen, dass sich die P-adische Irrationalzahl ζ in einen konvergenten unendlichen Kettenbruch mit ganzen rationalen Zählern und Nennern entwickeln lässt. Der Einfachheit halber werde jedoch ζ als eine P-adische Einheit, also

$$|\zeta|_P = 1$$

angenommen; hierin liegt offenbar keine wesentliche Einschränkung.

Wie üblich sei zur Abkürzung

$$p_{-1} = 1,\ q_{-1} = 0; \qquad p_0 = 0,\ q_0 = 1.$$

Weiter bedeute p_1, q_1 das zu $h = 1$ gehörige Lösungspaar, ferner p_{n+1}, q_{n+1} einen Nachfolger von p_n, q_n für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Die sämtlichen Determinanten

$$\Delta_n = p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1},\ \delta_n = p_{n-1}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n-1} \quad . \qquad (22)$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sind von Null verschieden. Für $n \geqq 2$ ist dies klar auf Grund von Satz 2. Dagegen ist für $n = 0$ und $n = 1$

$$\Delta_0 = 1,\ \delta_0 = q_1 \text{ und } \Delta_1 = -p_1,\ \delta_1 = -p_2,$$

und wenn eine der drei letzten Zahlen Null wäre, so wäre entsprechend

$$\mathrm{E}(p_1, q_1) = |p_1|\,|p_1|_P < 1, \quad \mathrm{E}(p_1, q_1) = |q_1|\,|q_1|_P < 1,$$
$$\mathrm{E}(p_2, q_2) = |q_2|\,|q_2|_P < 1,$$

was unmöglich ist, da p_1 und q_1, bzw. p_2 und q_2 nicht gleichzeitig verschwinden können.

Die Determinanten-Quotienten

$$a_n = -\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n},\ b_n = \frac{\delta_n}{\Delta_n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad . \quad . \qquad (23)$$

haben also Sinn und sind nichtverschwindende rationale Zahlen. Mit ihnen bestehen offenbar die Rekursionsformeln

$$\left.\begin{aligned} p_{n+1} &= a_n p_{n-1} + b_n p_n, \\ q_{n+1} &= a_n q_{n-1} + b_n q_n, \\ p_{n+1} - q_{n+1}\zeta &= a_n(p_{n-1} - q_{n-1}\zeta) + b_n(a_n - b_n\zeta). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \qquad (24)$$

Diese Formeln besagen andrerseits auf Grund der formalen Theorie der Kettenbrüche, dass

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad (25)$$

ist. Nach Formel (14) ist jedoch

$$|\,p_n - q_n\zeta\,|_P \leqq \frac{\sqrt{P}}{|\,p_n, q_n\,|\,|\,p_{n+1}, q_{n+1}\,|},$$

ferner wegen

$$\mathrm{E}(p_n, q_n) = |\,p_n, q_n\,|\,|\,p_n - q_n\zeta\,|_P < 1, \quad p_n^2 + q_n^2 > 0$$

die Zahl q_n für $n \geqq 1$ von Null verschieden, also

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \zeta\right|_P \leqq \frac{|\,q_n\,|}{|\,p_n, q_n\,|}\,\frac{\sqrt{P}}{|\,p_{n+1}, q_{n+1}\,|} \leqq \frac{\sqrt{P}}{|\,p_{n+1}, q_{n+1}\,|},$$

und somit in bezug auf P-adische Konvergenz

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{q_n} = \zeta.$$

Damit ist also bewiesen, dass sich ζ in den konvergenten unendlichen Kettenbruch

$$\zeta = \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots \quad . \quad . \qquad (26)$$

entwickeln lässt. Die wichtigsten Eigenschaften dieses Kettenbruches mögen hier noch einmal zusammengestellt werden:

a. Die Kettenbruch-Zähler und Nenner a_n und b_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) sind alle ungleich Null und von der Form

$$a_n = \frac{e_n P^{\alpha_n}}{d_n}, \quad b_n = \frac{c_n}{P \cdot d_n},$$

wobei die $\alpha \geqq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, $e \neq 0$ ganz rational sind, den Bedingungen

$$|d_n| \leqq 2\sqrt{P}, \quad |e_n| \leqq 2\sqrt{P}, \quad |b_n| < 2\sqrt{P}\,|a_n|$$

genügen und P nicht in d_n und e_n aufgeht. Für $P = 2$ können d_n und e_n gleich ± 1 genommen werden.

b. Die Näherungsbrüche p_n/q_n des Kettenbruches für ζ approximieren ζ gemäss den Ungleichungen

$$\frac{1}{2\,|p_n, q_n|\,|p_{n+1}, q_{n+1}|} \leqq |p_n - q_n\zeta|_P \leqq$$

$$\leqq \frac{\sqrt{P}}{|p_n, q_n|\,|p_{n+1}, q_{n+1}|}.$$

c. Die Determinanten

$$\Delta_n = p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n a_0\, a_1 \ldots a_{n-1}$$

aus auf einander folgenden Näherungen genügen den Bedingunge

$$1 \leqq |\Delta_n|\,|\Delta_n|_P \leqq 2\sqrt{P}. \quad (|\Delta_n|\,|\Delta_n|_P = 1 \text{ für } P = 2).$$

(Die Aussage *a* ist im bisherigen Text nur unter der Voraussetzung $n = 1$ enthalten; für $n = 0$ folgt sie aber leicht direkt, denn es ist $a_0 = p_1 \neq 0$ und $b_0 = q_1 \neq 0$ und ferner nach Definition von $p_1, q_1 : |p_1, q_1| \leqq \sqrt{P}$.)

8.) Zum Abschluss dieser Note soll schliesslich noch gezeigt werden, dass sich ζ auch in einen unendlichen Kettenbruch entwickeln lässt, dessen Zähler und Nenner alle ganz rational sind.

Es genügt zu diesem Zweck, in dem Kettenbruch (26) die Kettenbruch-Zähler und Nenner der Reihe nach mit ihren

Hauptnennern

$$\mathrm{P} \,.\, d_0, \quad \mathrm{P} \,.\, d_1, \quad \mathrm{P} \,.\, d_2, \quad \ldots$$

zu erweitern. Auf diese Weise wird gerade

$$\zeta = \frac{e_0 \mathrm{P}^{\alpha_0+1}|}{|\, c_0} + \frac{d_0 e_1 \mathrm{P}^{\alpha_1+2}|}{|\, c_1} + \frac{d_1 e_2 \mathrm{P}^{\alpha_2+2}|}{|\, c_2} + \frac{d_2 e_3 \mathrm{P}^{\alpha_3+2}|}{|\, c_3} + \ldots \tag{27}$$

und dies ist in der Tat ein Kettenbruch mit ganzen rationalen Zählern und Nennern. In dem besonders interessanten Fall $\mathrm{P} = 2$ nimmt diese Entwicklung die noch einfachere Form

$$\zeta = \frac{\varepsilon_0 \mathrm{P}^{\alpha_0+1}|}{|\, c_0} + \frac{\varepsilon_1 \mathrm{P}^{\alpha_1+2}|}{|\, c_1} + \frac{\varepsilon_2 \mathrm{P}^{\alpha_2+2}|}{|\, c_2} + \frac{\varepsilon_3 \mathrm{P}^{\alpha_3+2}|}{|\, c_3} + \ldots$$

an, wobei die sämtlichen Zahlen

$$\varepsilon_0, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \ldots$$

die Werte $+1$ oder -1 haben und ohne Einschränkung angenommen werden kann, dass die Nenner

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad \ldots$$

natürliche Zahlen sind, die ausserdem den Bedingungen

$$c_0 < \sqrt{2}\, \mathrm{P}^{\alpha_0+1}, \quad c_1 < \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{P}^{\alpha_1+2}, \quad c_2 < \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{P}^{\alpha_2+2}, \ \ldots .$$

genügen.