SONDERABDRUCK AUS JAHRESBERICHT
DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG
44. Band. 1934. Heft 9/12

Kurt Mahler

Über Diophantische Approximationen im Gebiete der p-adischen Zahlen

LEIPZIG / B. G. TEUBNER / BERLIN

Sonderabdruck aus dem
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. XLIV. 1934. Heft 9/12.
Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Über Diophantische Approximationen im Gebiete der p-adischen Zahlen.

Von Kurt Mahler in Krefeld.

1. Bei Untersuchungen über die Annäherung reeller Zahlen durch rationale Zahlen geht man häufig aus von folgendem bekannten Minkowskischen Satz[1]):

„*Seien*
$$L^{(h)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a^{(h,k)} x_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$
n Linearformen in n Unbestimmten mit reellen Koeffizienten und der nichtverschwindenden Determinante
$$d = |a^{(h,k)}|,$$
ferner
$$A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}$$
n positive Zahlen mit dem Produkt
$$\prod_{h=1}^{n} A^{(h)} = |d|.$$

1) Siehe etwa: Geometrie der Zahlen. Leipzig 1896, B. G. Teubner.

Dann gibt es n ganze rationale Zahlwerte für $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die nicht alle zugleich verschwinden, so daß gleichzeitig

$$|L^{(h)}(x)| \leqq A^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

ist."

Wie in dieser Note, die die erweiterte Fassung eines Vortrags auf der Mathematiker-Tagung in Bad Nauheim im Jahre 1932 darstellt, gezeigt werden soll, besitzt dieser Satz eine Verallgemeinerung im Gebiete der p-adischen Zahlen; es ist sogar möglich, gleichzeitig Formen mit Koeffizienten aus *verschiedenen* p-adischen Körpern zu betrachten.

2. Seien $P_1, P_2, \ldots, P_t$ endlich viele verschiedene Primzahlen. Wie üblich werde der P_τ-adische Wert einer beliebigen P_τ-adischen Zahl a mit $|a|_{P_\tau}$ bezeichnet; nach Definition ist $|0|_{P_\tau} = 0$, für $a \neq 0$ dagegen $|a|_{P_\tau} = P_\tau^{-f}$, wobei P_τ^{-f} diejenige Potenz von P_τ ist, für die $P_\tau^{-f} a$ eine P_τ-adische Einheit wird.

Die Verallgemeinerung des Minkowskischen Satzes lautet folgendermaßen:

Satz 1: „*Seien*

$$L^{(h)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a^{(h,k)} x_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

n Linearformen in n Unbestimmten mit reellen Koeffizienten und der nichtverschwindenden Determinante

$$d = |a^{(h,k)}|,$$

ferner für $\tau = 1, 2, \ldots, t$:

$$L_\tau^{(h)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_\tau^{(h,k)} x_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n_\tau)$$

je endlich viele Linearformen in denselben Unbestimmten mit ganzen P_τ-adischen Koeffizienten,

$$A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}$$

n positive Zahlen,

$$f_\tau^{(1)}, f_\tau^{(2)}, \ldots, f_\tau^{(n_\tau)}$$

für $\tau = 1, 2, \ldots, t$ je n_τ nichtnegative ganze rationale Zahlen. Wenn dann die Gleichung

$$\prod_{h=1}^{n} A^{(h)} \prod_{\tau=1}^{t} \prod_{h=1}^{n_\tau} P_\tau^{-f_\tau^{(h)}} = |d|$$

erfüllt ist, so gibt es n ganze rationale Zahlwerte für $x_1, x_2, \ldots, x_t$, die nicht alle zugleich verschwinden, so daß

$$|L^{(h)}(x)| \leqq A^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

$$|L_\tau^{(h)}(x)|_{P_\tau} \leqq P_\tau^{-f_\tau^{(h)}} \qquad \begin{pmatrix} \tau = 1, 2, \ldots, t \\ h = 1, 2, \ldots, n_\tau \end{pmatrix}$$

ist."

3. Der Beweis gelingt sehr leicht. Nach Voraussetzung besitzt z. B. die Form

$$L_\tau^{(h)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_\tau^{(h,k)} x_k$$

ganze P_τ-adische Koeffizienten. Es gibt also eine Linearform

$$\overline{L}_\tau^{(h)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_\tau^{(h,k)} x_k$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten, so daß die Differenz

$$L_\tau^{(h)}(x) - \overline{L}_\tau^{(h)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(a_\tau^{(h,k)} - \overline{a}_\tau^{(h,k)}\right) x_k$$

lauter durch $P_\tau^{f_\tau^{(h)}}$ teilbare P_τ-adische Koeffizienten besitzt. Wenn für ganze rationale Zahlwerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$|L_\tau^{(h)}(x)|_{P_\tau} \leqq P_\tau^{-f_\tau^{(h)}}$$

ist, so muß also gleichzeitig

$$|\overline{L}_\tau^{(h)}(x)|_{P_\tau} \leqq P_\tau^{-f_\tau^{(h)}}$$

oder damit gleichbedeutend

$$\overline{L}_\tau^{(h)}(x) \equiv 0 \pmod{P_\tau^{f_\tau^{(h)}}}$$

sein. Es gibt somit eine ganze rationale Zahl $x_{\tau,h}$, so daß

$$\overline{L}_\tau^{(h)}(x) + P_\tau^{f_\tau^{(h)}} x_{\tau,h} = 0$$

ist. Umgekehrt folgt aus dieser Gleichung wieder die Ungleichung

$$|L_\tau^{(h)}(x)|_{P_\tau} \leqq P_\tau^{-f_\tau^{(h)}}.$$

Sei zur Abkürzung

$$L_\tau'^{(h)}(x) = \overline{L}_\tau^{(h)}(x) + P_\tau^{f_\tau^{(h)}} x_{\tau,h}.$$

Dann ist demnach erlaubt, statt der P_τ-adischen Ungleichung

$$|L_\tau^{(h)}(x)|_{P_\tau} \leqq P_\tau^{-f_\tau^{(h)}}$$

die Gleichung $\qquad L_\tau'^{(h)}(x) = 0$

oder auch die Ungleichung $\quad |L_\tau'^{(h)}(x)| < 1$

zu betrachten; denn in der Linearform $L_\tau'^{(h)}(x)$ sind sowohl die Koeffizienten als auch die Unbestimmten ganz rational.

Man darf somit das Ungleichungssystem

$$|L^{(h)}(x)| \leqq \Lambda^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

$$|L_\tau^{(h)}(x)|_{P_\tau} \leqq P_\tau^{-f_\tau^{(h)}} \qquad \begin{pmatrix} \tau = 1, 2, \ldots, t \\ h = 1, 2, \ldots, n_\tau \end{pmatrix}$$

ersetzen durch das Ungleichungssystem

$$|L^{(h)}(x)| = \Lambda^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

$$|L_\tau'^{(h)}(x)| < 1 \qquad \begin{pmatrix} \tau = 1, 2, \ldots, t \\ h = 1, 2, \ldots, n_\tau \end{pmatrix},$$

wo jetzt nur noch reelle Koeffizienten und gewöhnliche Absolutbeträge auftreten. Die Anzahl dieser Bedingungen ist gleich

$$n + n_1 + n_2 + \cdots + n_t$$

und ebensogroß ist auch die Anzahl der auftretenden Unbestimmten x_k und $x_{\tau, k}$. Man hat also ein System vor sich, auf das sich der Minkowskische Satz anwenden läßt. Berechnet man die Determinate der linearen Formen

$$L^{(h)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a^{(h,k)} x_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

$$L_\tau'^{(h)}(x) = \sum \bar{a}_\tau^{(h,k)} x_k + P_\tau^{f_\tau^{(h)}} x_{\tau, h} \qquad \begin{pmatrix} \tau = 1, 2, \ldots, t \\ h = 1, 2, \ldots, n_\tau \end{pmatrix},$$

so erhält man den Wert

$$d \prod_{\tau=1}^{t} \prod_{h=1}^{n_\tau} P_\tau^{f_\tau^{(h)}}.$$

Der genannte Satz zeigt demnach die Existenz von ganzen rationalen Zahlen

$$x_k, \qquad x_{\tau, k}$$

die nicht alle verschwinden, von denen also auch die n ersten nicht alle gleich Null sind, so daß

$$|L^{(k)}(x)| \leqq \Lambda^{(h)} + \varepsilon \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

$$|L_\tau'^{(h)}(x)| < 1 \qquad \begin{pmatrix} (\tau = 1, 2, \ldots, t \\ (h = 1, 2, \ldots, n_\tau \end{pmatrix},$$

wie klein auch die positive Zahl ε ist; daraus folgt die Behauptung.

4. Satz 1 gestattet Anwendungen ähnlicher Art wie der gewöhliche Minkowskische Satz. Hiervon seien zwei erwähnt, die sich auf die Approximation p-adischer Zahlen beziehen.

Seien $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_t$ je eine ganze Zahl aus den Körpern der P_1-adischen, P_2-adischen, ..., P_t-adischen Zahlen. Indem man

$$n = m + 1, \quad n_1 = n_2 = \cdots = n_t = 1$$

nimmt und

$$L^{(h)}(x) = x_h \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

$$L_\tau(x) = x_0 + x_1 \zeta_\tau + \cdots + x_m \zeta_\tau^m \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots, t)$$

setzt, kommt man zu folgendem Ergebnis:

Satz 2: „*Wenn die positive Zahl Λ und die nichtnegativen ganzen rationalen Zahlen $f_1, f_2, \ldots, f_t$ der Gleichung*

$$\Lambda^{m+1} = \prod_{\tau=1}^{t} P_\tau^{f_\tau}$$

genügen, so gibt es $m+1$ *ganze rationale Zahlen* $x_0, x_1, \ldots, x_m$, *die nicht alle gleichzeitig verschwinden, so daß*

$$\max(|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_m|) \leqq \Lambda,$$

$$|x_0 + x_1\zeta_\tau + \cdots + x_m\zeta_\tau^m|_{P_\tau} \leqq P_\tau^{-f_\tau} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, t)$$

ist."

Sei ferner ζ noch eine beliebige reelle Zahl. Dann zeigt man entsprechenderweise, indem man

$$n = m+1, \quad n_1 = n_2 = \cdots = m_t = 1,$$

$$L^{(0)}(x) = x_0 + x_1\zeta + \cdots + x_m\zeta^m, \quad L^{(h)}(x) = x_h \quad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

$$L_\tau(x) = x_0 + x_1\zeta_\tau + \cdots + x_m\zeta_\tau^m \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, t)$$

setzt, daß folgender Satz gilt:

Satz 3: „*Wenn die positiven Zahlen* Λ, M *und die nichtnegativen ganzen rationalen Zahlen* $f_1, f_2, \ldots f_t$ *der Gleichung*

$$\Lambda^m M = \prod_{\tau=1}^{t^t} P_\tau^{f_\tau}$$

genügen, so gibt es $m+1$ *ganz rationale Zahlen* $x_0, x_1, \ldots, x_m$, *die nicht alle gleichzeitig verschwinden, so daß*

$$\max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|) \leqq \Lambda,$$

$$|x_0 + x_1\zeta + \cdots + x_m\zeta^m| \leqq M, \qquad |x_0 + x_1\zeta_\tau + \cdots + x_m\zeta_\tau^m|_{P_\tau} \leqq P_\tau^{-f_\tau}$$

$$(\tau = 1, 2. \ldots, t)$$

ist."

Diese beiden Sätze zeigen, daß es möglich ist, Zahlen aus den reellen und verschiedenen p-adischen Körpern beliebig genau durch dieselbe gewöhnliche algebraische Zahl anzunähern, natürlich jeweils in bezug auf die betreffende Bewertung. Nimmt man speziell $m = 1$, so ergibt sich, daß man die beiden Produkte

$$\prod_{t=1}^{t} \left|\frac{x}{y} - \zeta_\tau\right|_{P_\tau} \quad \text{und} \quad \left|\frac{x}{y} - \zeta\right| \prod_{t=1}^{t} \left|\frac{x}{y} - \zeta_\tau\right|_{P_\tau}$$

beliebig klein machen kann, indem man für $\frac{x}{y}$ geeignete gekürzte Brüche einsetzt. Man überlegt sich leicht darüber hinaus, daß man beide Produkte unendlich oft nicht größer als

$$\frac{c}{\max(|x|, |y|)^2}$$

machen kann, wobei im ersten Fall $c = 1$ ist, im zweiten Fall $c > 0$ noch von der reellen Zahl ζ abhängt. Ob diese Aussage die schärfste ist, die sich machen läßt, hängt von den speziellen Zahlen $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_t$

ab. Für geeignete Zahlsysteme, die ein Analogon zu den Liouvilleschen Zahlen bilden, läßt sich z. B. erreichen, daß beide Produkte kleiner als jede noch so hohe Potenz von $\max(|x|, |y|)$ werden, wenn $\frac{x}{y}$ eine gewisse Folge gekürzter Brüche durchläuft. In anderer Richtung liegt der verallgemeinerte Satz von Thue und Siegel; er sagt aus, daß beide Produkte höchstens endlich oft kleiner als

$$\max(|x|, |y|)^{-2\sqrt{n}}$$

sein können, wenn $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_t$ derselben algebraischen Gleichung n-ten Grades genügen. Dieser Satz gestattet Anwendungen auf die Theorie der binären Formen höheren Grades und verknüpft die Lehre von den Diophantischen Gleichungen mit der der Diophantischen Approximationen im Gebiete der p-adischen Zahlen.[2])

2) Siehe meine Arbeit: Zur Approximation algebraischer Zahlen, Math. Annalen **107** (1933), 691—730, und **108** (1933), 37—55.

(Eingegangen am 30. 9. 1932.)