KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM

Ein neues Prinzip für Transzendenzbeweise

VON

J. POPKEN und K. MAHLER

Reprinted from: Proceedings Vol. XXXVIII, N⁰. 8, 1935

Mathematics. — *Ein neues Prinzip für Transzendenzbeweise.* Von J. POPKEN und K. MAHLER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of September 28, 1935).

Der erste Verfasser zeigte in seiner Dissertation u. a. das folgende Ergebnis [1]):

Satz 12: *Stellt die Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$$

mit algebraischen Koeffizienten a_h *eine im Ursprung reguläre analytische Funktion dar, die einer eigentlichen algebraischen Differentialgleichung genügt, so ist mit einem geeignet gewählten* $c > 0$ *für* $h \geqq 2$

$$\textit{entweder} \quad a_h = 0 \quad \textit{oder} \quad |a_h| \geqq e^{-c\,h(\log h)^2}.$$

Dieser Satz kann in manchen Fällen zu Transzendenzbeweisen benutzt werden; denn genügt eine vorgegebene Potenzreihe einer algebraischen Differentialgleichung und streben ihre Koeffizienten a_h genügend schnell gegen Null, so können diese Koeffizienten, die von nur endlich vielen Zahlen algebraisch abhängen, nicht alle algebraisch sein.

Zu besonders bemerkenswerten Anwendungen gelangt man bei manchen Funktionen aus der Theorie der elliptischen Funktionen; ein solches Beispiel, das aber durchaus nicht vereinzelt dasteht, wollen wir in dieser Arbeit im Einzelnen behandeln. Wir werden nämlich zeigen, dass für jedes beliebige q mit

$$0 < |q| < 1$$

mindestens eine der drei Zahlen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2hn}}{(1-q^{2n})^{2h}} \qquad (h = 1, 2, 3)$$

transzendent ist.

Die Methode der vorliegenden Note stammt vom ersten Verfasser, die Durchführung des Beispiels vom zweiten.

---

[1]) J. POPKEN, Über arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen, Diss. Groningen 1935, S. 88.

1. Die WEIERSTRASSsche σ-Funktion gestattet die Darstellung [2])

$$e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} \sin\frac{\pi u}{2\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi u}{2\omega}}{\sin^2 \frac{\pi n \omega'}{\omega}}\right).$$

Wird

$$q = e^{\frac{i \pi \omega'}{\omega}}$$

gesetzt, so dass q der Ungleichung

$$0 < |q| < 1$$

genügt, so folgt

$$e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} \sin\frac{\pi u}{2\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4 q^{2n} \sin^2 \frac{\pi u}{2\omega}}{(1 - q^{2n})^2}\right).$$

Führen wir die neue Veränderliche

$$x = 2 i \sin\frac{\pi u}{2\omega}$$

und die beiden Funktionen

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{q^{2n} x^2}{(1-q^{2n})^2}\right), \quad F(x) = -\log f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{q^{2n} x^2}{(1-q^{2n})^2}\right)$$

ein, so wird also

$$e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma(u) = \frac{\omega}{\pi i} x f(x), \qquad \log \sigma(u) - \frac{\eta u^2}{2\omega} = \log\frac{\omega}{\pi i} + \log x - F(x). \quad (1)$$

Da die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{q^{2n}}{(1 - q^{2n})^2} \right|$$

konvergiert, so stellt $f(x)$ eine ganze Funktion von x mit unendlich vielen Nullstellen dar; $f(x)$ ist also eine ganze *transzendente* Funktion, so dass in der TAYLORreihe

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^{2h}$$

---

[2]) HALPHEN, Traité des Fonctions elliptiques I, S. 400, *zweite* Formel von (21).

unendlich viele Koeffizienten a_h von Null verschieden sind. Diese Koeffizienten lassen sich explizit darstellen in der Form

$$a_0 = 1, \quad a_h = (-1)^h \sum_{n_1} \sum_{n_2} \cdot\cdot \sum_{n_h} \frac{q^{2(n_1+n_2+\ldots+n_h)}}{\{(1-q^{2n_1})(1-q^{2n_2})\ldots(1-q^{2n_h})\}^2}$$

$$(h = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo die Summation über alle Systeme von h natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_h$ mit $n_1 < n_2 < \cdot\cdot < n_h$ erstreckt wird; ihre Absolutbeträge besitzen daher die obere Schranke

$$|a_h| \leqq \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=2}^{\infty} \cdot\cdot \sum_{n_h=h}^{\infty} \frac{|q|^{2(n_1+n_2+\ldots+n_h)}}{(1-|q|^2)^{2h}} \leqq$$

$$\leqq \frac{|q|^{2(1+2+\ldots+h)}}{(1-|q|^2)^{2h}} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} |q|^{2\nu_1} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} |q|^{2\nu_2} \cdot\cdot \sum_{\nu_h=0}^{\infty} |q|^{2\nu_h} = \frac{|q|^{2(1+2+\ldots+h)}}{(1-|q|^2)^{3h}}$$

$$(h = 1, 2, 3, \ldots),$$

so dass für jedes noch so grosse positive c

$$|a_h| = o\left(e^{-ch(\log h)^2}\right)$$

ist. Wir werden im folgenden Paragraphen zeigen, dass $f(x)$ einer algebraischen Differentialgleichung genügt. Auf Grund von Satz 12 können daher nicht alle Zahlen

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \ldots .$$

algebraisch sein.

Entsprechenderweise hat $F(x)$ eine TAYLORreihe

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} A_h \frac{x^{2h}}{h}$$

mit den Koeffizienten

$$\frac{A_h}{h} = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2hn}}{(1-q^{2n})^{2h}} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots).$$

Aus

$$f(x) = e^{-F(x)}, \; F(0) = 0$$

ist leicht abzuleiten, dass jeder Koeffizient a_h ein Polynom in $A_1, A_2, \ldots, A_h$ mit rationalen Koeffizienten ist [3]). Also folgt

„Nicht alle Zahlen

$$A_h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2hn}}{(1-q^{2n})^{2h}} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

sind für $0 < |q| < 1$ *algebraisch".*

---

[3]) Siehe z.B. J. POPKEN, loc. cit. S. 106.

2. Man gelangt folgendermassen zu der Differentialgleichung für $f(x)$: Es ist bekanntlich

$$p(u) = -\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2},$$

$$p'(u)^2 = 4\,p(u)^3 - g_2\,p(u) - g_3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{2}$$

wo g_2 und g_3 die rationalen Invarianten sind. Ferner ist nach (1)

$$-\log \sigma(u) + \frac{\eta\, u^2}{2\omega} = \log \frac{\pi i}{\omega} - \log x + F(x)$$

und also

$$p(u) + \frac{\eta}{\omega} = -\frac{d^2 \log x}{du^2} + \frac{d^2 F(x)}{du^2},$$

$$p'(u) = -\frac{d^3 \log x}{du^3} + \frac{d^3 F(x)}{du^3}.$$

Weiter ist wegen $x = 2i \sin \frac{\pi u}{2\omega}$:

$$\frac{dx}{du} = \frac{i\pi}{2\omega}\sqrt{x^2+4},$$

$$\frac{d^2 x}{du^2} = \left(\frac{i\pi}{2\omega}\right)^2 x,$$

$$\frac{d^3 x}{du^3} = \left(\frac{i\pi}{2\omega}\right)^3 \sqrt{x^2+4}$$

und daher

$$\frac{dF(x)}{du} = \frac{i\pi}{2\omega} F'(x)\sqrt{x^2+4},$$

$$\frac{d^2 F(x)}{du^2} = \left(\frac{i\pi}{2\omega}\right)^2 \{(x^2+4)\,F''(x) + x\,F'(x)\},$$

$$\frac{d^3 F(x)}{du^3} = \left(\frac{i\pi}{2\omega}\right)^3 \{(x^2+4)\,F'''(x) + 3\,x\,F''(x) + F'(x)\}\sqrt{x^2+4},$$

ferner

$$\frac{d \log x}{du} = \frac{i\pi}{2\omega}\,\frac{\sqrt{x^2+4}}{x},$$

$$\frac{d^2 \log x}{du^2} = -\left(\frac{i\pi}{2\omega}\right)^2 \cdot \frac{4}{x^2},$$

$$\frac{d^3 \log x}{du^3} = \left(\frac{i\pi}{2\omega}\right)^3 \cdot \frac{8\sqrt{x^2+4}}{x^3},$$

so dass sich

$$p(u) = \left(\frac{i\pi}{2\omega}\right)^2 \left\{\frac{4\,\omega\,\eta}{\pi^2} + \frac{4}{x^2} + (x^2+4)\,F''(x) + x\,F'(x)\right\},$$

$$p'(u) = \left(\frac{i\pi}{2\omega}\right)^3 \left\{-\frac{8}{x^3} + (x^2+4)\,F'''(x) + 3\,x\,F''(x) + F'(x)\right\} \sqrt{x^2+4},$$

und damit wegen (2) die Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} &\left\{-\frac{8}{x^3} + (x^2+4)\,F'''(x) + 3\,x\,F''(x) + F'(x)\right\}^2 (x^2+4) = \\ &= 4\left\{\frac{4\,\omega\,\eta}{\pi^2} + \frac{4}{x^2} + (x^2+4)\,F''(x) + x\,F'(x)\right\}^3 - \\ &- \left(\frac{2\omega}{i\pi}\right)^4 g_2 \left\{\frac{4\,\omega\,\eta}{\pi^2} + \frac{4}{x^2} + (x^2+4)\,F''(x) + x\,F'(x)\right\} - \left(\frac{2\omega}{i\pi}\right)^6 g_3 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

für $F(x)$ ergibt. Wegen

$$F'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

folgt hieraus eine algebraische Differentialgleichung für die Funktion $f(x)$.

3. Die vorige Differentialgleichung für $F(x)$ kann dazu dienen, zwischen den Grössen

$$A_h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2hn}}{(1-q^{2n})^{2h}} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

bestehende algebraische Relationen herzuleiten. Man hat

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} A_h \frac{x^{2h}}{h},$$

so dass, wenn

$$\alpha_h = h\,A_h + (4\,h+2)\,A_{h+1} \qquad (\alpha_0 = 2\,A_1)$$

gesetzt wird,

$$(x^2+4)\,F''(x) + x\,F'(x) = 4 \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h\, x^{2h}$$

und folglich

$$(x^2+4)\,F'''(x) + 3\,x\,F''(x) + F'(x) = 8 \sum_{h=1}^{\infty} h\,\alpha_h\, x^{2h-1}$$

ist. Die Differentialgleichung (3) für $F(x)$ geht also über in

$$\left\{-\frac{8}{x^3}+8\sum_{h=1}^{\infty} h\,\alpha_h\,x^{2h-1}\right\}^2 (x^2+4)=$$

$$=4\left\{\frac{4\,\omega\,\eta}{\pi^2}+\frac{4}{x^2}+4\sum_{h=0}^{\infty}\alpha_h\,x^{2h}\right\}^3-$$

$$-\left(\frac{2\omega}{i\pi}\right)^4 g_2\left\{\frac{4\,\omega\,\eta}{\pi^2}+\frac{4}{x^2}+4\sum_{h=0}^{\infty}\alpha_h\,x^{2h}\right\}-\left(\frac{2\omega}{i\pi}\right)^6 g_3.$$

Weiter ist bekanntlich [4])

$$\frac{4\,\omega\,\eta}{\pi^2}=\frac{1}{3}-8\,A_1=\frac{1}{3}-4\,\alpha_0,$$

so dass, wenn noch zur Abkürzung

$$G_2=\frac{\omega^4 g_2}{\pi^4}\quad,\quad G_3=-\frac{\omega^6 g_3}{\pi^6}$$

gesetzt wird, die vorige Beziehung die Gleichung

$$\left\{-1+\sum_{h=1}^{\infty} h\,\alpha_h\,x^{2h+2}\right\}^2 (x^2+4)=$$

$$=4\left\{1+\frac{x^2}{12}+\sum_{h=1}^{\infty}\alpha_h\,x^{2h+2}\right\}^3-G_2\,x^4\left\{1+\frac{x^2}{12}+\sum_{h=1}^{\infty}\alpha_h\,x^{2h+2}\right\}-G_3\,x^6$$

liefert. Wir entwickeln beide Seiten dieser Gleichung nach Potenzen von x^2 und vergleichen die entsprechenden Koeffizienten. Die Koeffizienten von 1 und von x^2 stimmen evidenterweise überein; dagegen ergeben diejenigen von x^4 und x^6 die Relationen:

$$-8\,\alpha_1=\frac{1}{12}+12\,\alpha_1-G_2,$$

$$-16\,\alpha_2-2\,\alpha_1=\frac{1}{432}+12\,\alpha_2+2\,\alpha_1-\frac{G_2}{12}-G_3,$$

so dass sich sowohl G_2 und G_3 durch α_1 und α_2, als auch umgekehrt α_1 und α_2 durch G_2 und G_3 linear mit rationalen Koeffizienten ausdrücken lassen:

$$G_2=20\,\alpha_1+\frac{1}{12},\qquad \alpha_1=\frac{1}{20}\,G_2-\frac{1}{240},$$

$$G_3=28\,\alpha_2+\frac{7}{3}\,\alpha_1-\frac{1}{216},\qquad \alpha_2=\frac{1}{28}\,G_3-\frac{7}{60}\,G_2+\frac{31}{2160}.$$

---

[4]) HALPHEN, loc. cit. S. 404, Formel (33).

Allgemein ist für $h = 3, 4, 5, \ldots$ der Koeffizient von x^{2h+2} auf der linken Seite der vorigen Gleichung gleich

$$-8\,h\,\alpha_h + P_h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}),$$

und auf der rechten Seite gleich

$$12\,\alpha_h + Q_h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}, G_2, G_3);$$

dabei bedeuten

$$P_h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}) \quad , \quad Q_h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}, G_2, G_3)$$

Polynome in den Argumenten mit rationalen Koeffizienten. Folglich kann α_h für solche h als Polynom in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}$ oder auch als Polynom in $G_1, G_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{h-1}$ mit rationalen Koeffizienten ausgedrückt werden. Indem wir diese Darstellung der Reihe nach für alle $h = 3, 4, 5, \ldots$ benutzen, folgt, dass sich alle Zahlen

$$\alpha_h = h\,A_h + (4\,h + 2)\,A_{h+1} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

als Polynome in

$$\alpha_1,\ \alpha_2$$

oder auch in

$$G_2,\ G_3$$

mit rationalen Koeffizienten ausdrücken lassen. Also lassen sich die Grössen

$$A_h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2hn}}{(1-q^{2n})^{2h}} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

auch als Polynome in

$$A_1,\ A_2,\ A_3$$

oder auch in

$$\frac{\omega\,\eta}{\pi^2},\ \frac{\omega^4\,g_2}{\pi^4},\ \frac{\omega^6\,g_3}{\pi^6}$$

mit rationalen Koeffizienten darstellen. Da aber nach § 1 mindestens eine der Zahlen A_h transzendent ist, so folgt:

Satz A: *Für jedes q mit $0 < |q| < 1$ ist mindestens eine der drei Reihen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{4n}}{(1-q^{2n})^4},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{6n}}{(1-q^{2n})^6}$$

eine transzendente Zahl.

Satz B: *Von den drei Grössen*

$$\frac{\omega\,\eta}{\pi^2}\,,\ \frac{\omega^4\,g_2}{\pi^4}\,,\ \frac{\omega^6\,g_3}{\pi^6}\,,$$

die zu einer nicht ausgearteten p-Funktion gehören, ist stets mindestens eine nicht algebraisch.

Nachträglich wird uns die Note „Sur les séries entières satisfaisant à une équation différentielle algébrique'' von G. PÓLYA (C.R. Paris, 19 août 1935, p. 444—445) bekannt. Ohne Beweis wird hierin u.a. erstens ein im Wesentlichen zu Satz 12 der POPKENschen Dissertation äquivalenter Satz und zweitens der hieraus abgeleitete Transzendenzsatz:

„Ist $0 < |h| < 1$, so ist mindestens eine der fünf Zahlen

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r\,h^{2r}}{1-h^{2r}}\,,\ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^3\,h^{2r}}{1-h^{2r}}\,,\ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^5\,h^{2r}}{1-h^{2r}}\,,$$

$$\frac{\sum\limits_{r=1}^{\infty} (-1)^r\,(2r-1)\,h^{(2r-1)^2}}{\prod\limits_{r=1}^{\infty} (1-h^{8r})\,(1-h^{8r-4})^2}\,,\ \frac{\sum\limits_{r=1}^{\infty} (-1)^r\,r^2\,h^{4r^2}}{\prod\limits_{r=1}^{\infty} (1-h^{8r})\,(1-h^{8r-4})_2}$$

transzendent''

mitgeteilt; da die drei ersten von diesen Zahlen im wesentlichen gleich

$$\frac{\omega\,\eta}{\pi^2}\,,\ \frac{\omega^4\,g_2}{\pi^4}\,,\ \frac{\omega^6\,g_3}{\pi^6}$$

sind, so ist dieses PÓLYAsche Ergebnis in dem unsrigen enthalten.