UEBER POLYGONE MIT UM- ODER INKREIS.

VON

KURT MAHLER.

Während die Drei- oder Vierecke mit Um- oder Inkreis in allen geometrischen Schulbüchern behandelt werden, findet man selten Angaben über höhere Polygone, die einen umbeschriebenen oder einbeschriebenen Kreis zulassen. *Ich will in dieser Note die Frage behandeln, unter welchen Bedingungen es Polygone aus gegebenen Seiten* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *gibt, die einen Um- oder Inkreis besitzen, und in wieweit alsdann diese Polygone bestimmt sind.* Dabei beschränke ich mich aber wie üblich auf konvexe Polygone, und nehme ausserdem an, dass die Winkel in den Ecken dieser Polygone kleiner als π $(= 2R = 180°)$ sind, so dass im Fall der Inkreis-Polygone nicht zwei aufeinander folgende Seiten in die gleiche Gerade fallen können.

1. Es werde mit der Frage begonnen, wann ein konvexes Polygon mit den Seiten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in dieser Reihenfolge existiert, das einen Umkreis, etwa vom Radius r, besitzt.

Dazu ist zunächst nötig, dass die Ungleichungen

$$(1) \qquad a_h < \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n} a_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt sind, denn sonst gibt es überhaupt kein echtes Polygon aus diesen Seiten. Weiter muss der Umkreis-Radius r den Bedingungen

$$(2) \qquad 2r \geq a_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, da jede Sehne eines Kreises nicht grösser als sein Durchmesser ist.

Ausser diesen notwendigen Forderungen (1) und (2) wollen wir noch annehmen, dass

$$(3) \qquad a_1 = \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

sei; hierin liegt keine Einschränkung, da es erlaubt ist, die Seiten des Polygons irgendwie zyklisch umzunennen.

Das Polygon zerlegt seinen Umkreis in n Teilbögen

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n,$$

wobei Γ_h denjenigen Bogen bezeichne, der durch die Ecken der Seite a_h begrenzt wird und keinen der übrigen Eckpunkte des Polygons enthält. Verstehen wir unter α_h den Zentriwinkel des Bogens Γ_h, so ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 2\pi, \tag{4}$$

da sich diese Zentriwinkel zum vollen Winkel 2π ($= 4R = 360^\circ$) im Mittelpunkt des Umkreises zusammensetzen. Diese Gleichung (4) zeigt, dass höchstens einer der Winkel α_h grösser als π sein kann; demgemäss wollen wir das betrachtete Umkreispolygon von erster oder von zweiter Art nennen, jenachdem alle Winkel α_h nicht grösser als π sind, oder einer von ihnen den Wert π übersteigt.

2. Zwischen dem Winkel α_h und der zugehörigen Seite a_h besteht offenbar die Beziehung

$$\sin\frac{\alpha_h}{2} = \frac{a_h}{2r} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Bedeutet arc sin x für $0 \leq x \leq 1$ denjenigen eindeutig bestimmten Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, dessen Sinus gleich x ist, so gilt also umgekehrt:

$$\alpha_h = \begin{cases} 2 \arcsin \dfrac{a_h}{2r} & \text{für } \alpha_h \leq \pi \\ 2\pi - 2 \arcsin \dfrac{a_h}{2r} & \text{für } \alpha_h \geq \pi \end{cases} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Folglich gilt für ein Polygon erster Art die Gleichung

$$\sum_{h=1}^{n} \arcsin \frac{a_h}{2r} = \pi,$$

oder, wenn wir zur Abkürzung

$$\phi(r) = \sum_{h=2}^{n} \arcsin \frac{a_h}{2r} \tag{5}$$

setzen, auch die Gleichung

$$\phi(r) + \arcsin \frac{a_1}{2r} = \pi. \tag{6}$$

Wegen

$$\arcsin \frac{a_1}{2r} \leq \frac{\pi}{2}$$

folgt hieraus noch, dass

$$\phi(r) \geq \frac{\pi}{2} \tag{6'}$$

sein muss.

Für ein Polygon zweiter Art erhält man dagegen die Beziehung

$$\sum_{\substack{h=1 \\ h \neq g}}^{n} \arcsin \frac{a_h}{2r} = \arcsin \frac{a_g}{2r},$$

wo a_g denjenigen Zentriwinkel bezeichnet, der grösser als π ist. Da die Funktion arc sin x nichtnegativ ist und mit wachsendem x zunimmt, so folgen hieraus die Ungleichungen

$$\frac{a_g}{2r} > \frac{a_h}{2r} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n;\ h \neq g),$$

und wegen Voraussetzung (3) muss demnach der Index $g = 1$ sein. Also muss r der folgenden Gleichung genügen:

$$\phi(r) = \arcsin \frac{a_1}{2r}. \tag{7}$$

Nach Annahme ist ausserdem

$$2\pi - 2 \arcsin \frac{a_1}{2r} = a_1 > \pi, \quad \text{d.h.} \quad \arcsin \frac{a_1}{2r} < \frac{\pi}{2},$$

und demnach ist noch

$$\phi(r) < \frac{\pi}{2} \tag{7'}$$

für ein Polygon zweiter Art.

3. Falls das Bedingungssystem (6) und (6′), bzw. das Bedingungssystem (7) und (7′) eine Lösung r besitzt, die der Ungleichung

$$r \geq r_0, \qquad\qquad r_0 = \frac{a_1}{2r},$$

genügt, lässt sich offenbar in den Kreis vom Radius r ein konvexes Polygon erster, bzw. zweiter Art mit Seiten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in dieser Reihenfolge einbeschreiben, und zwar ist aus der Anschauung klar, dass dieses Polygon bis auf eine Drehung oder Spiegelung eindeutig bestimmt ist. Bezeichnen wir die Anzahl der verschiedenen Lösungen $r \geq r_0$ von (6), (6′) mit N_1 und die von (7), (7′) mit N_2, so gibt es also genau N_1 verschiedene Polygone erster Art und N_2 verschiedene Polygone zweiter Art aus den gegebenen Seiten.

Die Anzahl N_1 kann sehr leicht bestimmt werden. Die Funktion von r

$$\psi(r) = \sum_{n=1}^{n} \arc\sin\frac{a_h}{2r} = \phi(r) + \arc\sin\frac{a_1}{2r}$$

ist offenbar im unendlichen Intervall $r \geqq r_0$ monoton abnehmend im strengen Sinn und strebt gegen Null, wenn r über alle Grenzen wächst. Sie erreicht also ihr Maximum, wenn r den kleinsten zulässigen Wert r_0 hat:

$$\psi(r_0) = \phi(r_0) + \arc\sin\frac{a_1}{2r_0} = \phi(r_0) + \frac{\pi}{2}.$$

Damit $\psi(r)$ einmal gleich π wird, muss demnach

$$\psi(r_0) \geqq \pi, \quad \text{d.h.} \quad \phi(r_0) \geqq \frac{\pi}{2}$$

sein, und wenn diese Bedingung erfüllt ist, so gibt es wegen der Stetigkeit von $\psi(r)$ einen und wegen der Monotonität dieser Funktion auch nur einen Lösungswert $r \geqq r_0$. Also erhalten wir:

$$N_1 = \begin{cases} 1 \text{ für } \phi(r_0) \geqq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ für } \phi(r_0) < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{8}$$

4. Um auch N_2 zu bestimmen, betrachten wir die Funktion

$$\chi(r) = \phi(r) - \arc\sin\frac{a_1}{2r}.$$

Nach den bisherigen Ergebnissen ist N_2 gleich der Anzahl der verschiedenen Nullstellen von $\chi(r)$, die der Ungleichung

$$r > r_0$$

genügen; denn der Wert $r = r_0$ ist wegen (7′) auszuschliessen.

Es ist

$$\chi(r_0) = \phi(r_0) - \frac{\pi}{2}$$

und also

$$\chi(r_0) \begin{cases} \geqq 0 \text{ für } \phi(r_0) \geqq \frac{\pi}{2}, \\ < 0 \text{ für } \phi(r_0) < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Weiter gilt bekanntlich

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arc \sin x}{x} = 1$$

und daher

$$\lim_{r \to \infty} r\chi(r) = \tfrac{1}{2}(-a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n),$$

so dass nach (1)

$$\chi(r) > 0 \quad \text{für alle genügend grossen } r$$

ist.

Eine einfache Rechnung ergibt für die Ableitung $\chi'(r)$ von $\chi(r)$ die Formeln

$$r\sqrt{4r^2 - a_1^2}\,\chi'(r) = a_1 - \sum_{h=2}^{n} a_h \sqrt{\frac{4r^2 - a_1^2}{4r^2 - a_h^2}} =$$

$$= a_1 - \sum_{h=2}^{n} \frac{a_h}{\sqrt{1 + \dfrac{a_1^2 - a_h^2}{4r^2 - a_1^2}}},$$

in der sämtliche Quadratwurzeln nichtnegativ zu nehmen sind. Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichungen ist für $r \geq r_0$ offenbar eine monoton abnehmende Funktion im strengen Sinn von r und hat für $r = r_0$ den Wert $a_1 > 0$, strebt dagegen mit zunehmendem r gegen die negative Zahl

$$a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_n$$

und muss daher für $r \geq r_0$ genau einmal verschwinden, etwa bei r^*. Alsdann gilt

$$\chi'(r) \begin{cases} > 0 \text{ für } r_0 \leq r < r^*, \\ < 0 \text{ für } \qquad r > r^*. \end{cases}$$

Die ursprüngliche Funktion $\chi(r)$ nimmt demnach monoton zu, wenn r von r_0 bis r^* läuft, hat bei r^* ein Maximum, und nimmt bei weiter zunehmendem r monoton ab, bleibt aber für alle genügend grossen r positiv, wie wir oben zeigten. Demnach muss erst recht das Maximum

$$\chi(r^*) > 0$$

sein. Für $r \geq r^*$ kann $\chi(r)$ daher nicht verschwinden, und eine etwaige Nullstelle muss im Intervall $r_0 < r < r^*$ liegen, in dem die Funktion vom Werte $\chi(r_0)$ ab stetig und monoton bis zu ihrem positiven Maximum $\chi(r^*)$ wächst. Sie wird folglich in diesem Intervall dann und nur dann einmal gleich

Null und zwar genau einmal, wenn sie an der unteren Grenze negativ ist, und somit ergibt sich die Schlussformel

$$(9)\qquad N_2 = \begin{cases} 0 \text{ für } \phi(r_0) \geqq \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 \text{ für } \phi(r_0) < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

5. Die Formeln (8) und (9) liefen zusammen das Ergebnis:

$$(10)\qquad N_1 + N_2 = 1,$$

und leiten also zu folgendem abschliessenden Satz:

Satz 1: *Aus gegebenen n Seiten $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ die den Ungleichungen*

$$a_h < \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n} a_k \qquad (h = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

genügen, lässt sich in dieser Reihenfolge durch geeignete Wahl der Winkel auf eine und nur eine Art ein konvexes Polygon mit Umkreis bilden.

Der Beweis zeigt, dass dieses Polygon von erster oder zweiter Art wird, je nachdem

$$\phi(r_0) \geqq \frac{\pi}{2} \qquad \text{oder} \qquad \phi(r_0) < \frac{\pi}{2}$$

war. Vermöge der Gleichungen (6), bzw. (7) kann der Umkreisradius und damit das Polygon bestimmt werden. Anstelle dieser transzendenten Gleichungen lassen sich auch die äquivalenten algebraischen Gleichungen

$$\prod_{h=1}^{n} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{a_h}{2r}\right)^2} + \frac{a_h}{2r}\, i \right) = -1,$$

bzw.

$$\prod_{h=2}^{n} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{a_h}{2r}\right)^2} + \frac{a_h}{2r}\, i \right) = \sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{2r}\right)^2} + \frac{a_1}{2r}\, i$$

herleiten.

6. Gehen wir jetzt zur Betrachtung der Polygone aus den Seiten $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ über, die einen Inkreis, etwa vom Radius ϱ zulassen, so wird es nötig, zwischen den beiden Fällen, dass n *ungerade*, bzw. *gerade* ist, zu unterscheiden.

Wir nehmen an, dass alle Winkel des Polygons kleiner als π sind, so dass der Inkreis jede Seite des Polygons in einem innern Punkte und nicht in einer Ecke berühren muss. Durch diese Berührungspunkte zerfällt jede Seite in zwei Abschnitte, wobei immer die vom gleichen Eckpunkte ausgehenden Abschnitte zweier auf einander folgenden Seiten des Polygons nach bekannten Sätzen übereinstimmen. Geben wir also dem Umfang des Polygons einen bestimmten Richtungssinn und bezeichnen wir alsdann jedesmal den ersten Abschnitt der Seite a_h mit x_h, so wird der Reihe nach:

(11) $a_1 = x_1 + x_2,\ a_2 = x_2 + x_3,\ \ldots,\ a_{n-1} = x_{n-1} + x_n,\ a_n = x_n + x_1.$

Ausserdem muss jeder der Abschnitte x_h positiv sein:

(12) $$x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \ldots.,\ x_n > 0.$$

Vom Mittelpunkt des Inkreises aus erscheint jeder Abschnitt x_h unter einem gewissen Winkel $\frac{\beta_h}{2}$; dabei ist

(13) $$\beta_1 + \beta_2 + \ldots. + \beta_n = 2\pi,$$

da sich die Winkel β_h zum vollen Winkel um den Inkreis-Mittelpunkt zusammensetzen. Man hat offenbar

$$\operatorname{tg}\frac{\beta_h}{2} = \frac{x_h}{\varrho} \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots.,\ n)$$

und demnach

$$\beta_h = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x_h}{\varrho},$$

wenn $\operatorname{arc\,tg} y$ für $y \geq 0$ denjenigen eindeutig bestimmten Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet, dessen Tangens gleich y ist. Die Gleichung (13) erhält somit die Gestalt

(14) $$\sum_{h=1}^{n} \operatorname{arc\,tg} \frac{x_h}{\varrho} = \pi.$$

Sind bereits positive Lösungen $x_1,\ x_2,\ \ldots.\ x_n$ der Gleichungen (11) bekannt, so bestimmt (14) den Inkreisradius ϱ und damit auch das diesem Kreis umschriebene Polygon aus den Seiten $a_1,\ a_2,\ \ldots.,\ a_n$ eindeutig; denn die Funktion von ϱ:

$$\lambda(\varrho) = \sum_{h=1}^{n} \operatorname{arc\,tg} \frac{x_h}{\varrho}$$

nimmt offenbar monoton im strengen Sinn von $\frac{n\pi}{2}$ bis 0 ab, wenn ϱ von 0 bis ∞ läuft, und muss daher wegen $n \geq 3$ einmal und nur einmal gleich π werden.

Demnach ist die Anzahl der verschiedenen konvexen Polygone mit Inkreis aus den Seiten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ genau gleich der Anzahl der verschiedenen Lösungssysteme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von (11) und (12).

7. Diese Lösungsanzahl hängt nun erstens von dem Rest von n modulo 2, zweitens aber von der Grösse der Seiten a_h ab.

Wenn ungerade ist, so lassen sich die Gleichungen (11) auf genau eine und nur eine Art auflösen, und man erhält:

$$(15) \qquad 2x_h = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_{h+k} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei unter a_{h+n} wieder a_h zu verstehen ist ($h = 1, 2, \ldots, n-1$). Damit die Ungleichungen (12) erfüllt sind, müssen die Seiten a_h demnach den Ungleichungen

$$(16) \qquad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_{h+k} > 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen. Diese Ungleichungen sind umgekehrt auch hinreichend für die Lösbarkeit von (11) unter den Bedingungen (12), und wenn sie erfüllt sind, so gibt es ein und nur ein Polygon mit Inkreis aus den gegebenen Seiten. (Man beachte, dass die Forderungen (1) ebenfalls aus (16) folgen, wie es sein muss. Entsprechendes gilt für gerades n).

Wenn n gerade ist, so sind die Gleichungen (11) nicht mehr unabhängig von einander; sie können allein dann befriedigt werden, wenn

$$(17) \qquad \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h-1} a_h = 0$$

ist, da sie sonst einander widersprechen. Ausser dieser Gleichung sind noch gewisse endlich viele Ungleichungen zu erfüllen, damit auch die Lösungswerte x_h sich positiv wählen lassen. Um diese Bedingungen angeben zu können, werde gesetzt:

$$(18) \qquad \mathrm{A}_h^{(\nu)} = \sum_{k=0}^{2\nu} (-1)^k a_{h+k} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, n \\ \nu = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1 \end{pmatrix},$$

wobei a_{h+n} wieder a_h bedeutet. Aus den Gleichungen (11) folgt offenbar

$$\mathrm{A}_h^{(\nu)} = x_h + x_{h+2\nu+1} > 0 \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, n \\ \nu = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1 \end{pmatrix}$$

und also müssen die Ungleichungen

$$(19)\qquad A_h^{(\nu)} > 0 \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, n \\ \nu = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1 \end{pmatrix}$$

befriedigt sein, wenn alle x_h positiv sind. Diese endlich vielen Ungleichungen sind umgekehrt zusammen mit der Gleichung (17) hinreichend, damit sich (11) und (12) und zwar auf unendlichviele verschiedene Weisen lösen lassen. Denn lösen wir die Gleichungen (11) bei gegebenem x_1 nach den übrigen x_h auf, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1, \\ x_2 &= a_1 - x_1, \\ x_3 &= a_2 - a_1 + x_1, \\ &\vdots \\ x_h &= a_{h-1} - a_{h-2} + a_{h-3} - \ldots + (-1)^h a_1 - (-1)^h x_1, \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - \ldots + (-1)^n a_1 - (-1)^n x_1. \end{aligned}$$

Soll x_1 sich so wählen lassen, dass alle $x_h > 0$ sind, so muss demnach

$$(20)\qquad \max_{\mu = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1} \left(\sum_{h=0}^{2\mu+1} (-1)^h a_{h+1} \right) < x_1 < \min_{\nu = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1} \left(\sum_{h=0}^{2\nu} (-1)^h a_{h+1} \right)$$

sein. In dieser Ungleichung ist nun jede Summe links:

$$\sum_{h=0}^{2\mu+1} (-1)^h a_{h+1}$$

kleiner als jede Summe rechts:

$$\sum_{h=0}^{2\nu} (-1)^h a_{h+1},$$

denn man hat für $\mu < \nu$ nach (19):

$$\sum_{h=0}^{2\nu} (-1)^h a_{h+1} - \sum_{h=0}^{2\mu+1} (-1)^h a_{h+1} = A_{2\mu+2}^{(\nu-\mu-1)} > 0,$$

und für $\mu \geq \nu$ aus dem gleichen Grund

$$\sum_{h=0}^{2\nu} (-1)^h a_{h+1} - \sum_{h=0}^{2\mu+1} (-1)^h a_{h+1} = A_{2\nu+2}^{\mu-\nu} > 0.$$

Also kann x_1 auf unendlichviele verschiedene Arten gemäss der Ungleichung (20) gewählt werden, damit auch das System aller n Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, und es ergibt sich, dass in dem jetzigen Fall unendlichviele Polygone aus den gegebenen Seiten mit Inkreis existieren. Damit haben wir also bewiesen:

Satz 2: *Aus gegebenen n Seiten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kann für ungerades n allein dann ein konvexes Polygon mit Inkreis, und zwar genau ein einziges, hergestellt werden, wenn die Seiten den Ungleichungen*

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_{h+k} > 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen. Für gerades n dagegen lässt sich nur dann ein Polygon mit Inkreis aus den gegebenen Seiten herstellen, wenn

$$\sum_{h=1}^{n} (-1)^{h-1} a_h = 0$$

und gleichzeitig

$$\sum_{k=0}^{2\nu} (-1)^k a_{h+k} > 0 \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, n \\ \nu = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1 \end{pmatrix}$$

ist, und unter diesen Voraussetzungen gibt es sogar unendlichviele verschiedene solche Polygone.

Der Beweis hat für den Radius des Inkreises die transzendente Gleichung

$$\sum_{h=1}^{n} \operatorname{arc\,tg} \frac{x_h}{\varrho} = \pi$$

ergeben; an ihrer Stelle lässt sich auch die algebraische Gleichung

$$\prod_{h=1}^{n} \frac{\varrho + x_h i}{\varrho - x_h i} = 1$$

gewinnen. Aus dieser ergibt sich z.B. für $n = 5$ das merkwürdige Ergebnis, dass sich das Inkreis-Fünfeck aus gegebenen Seiten mit alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal konstruieren lässt. Ein entsprechendes, aber umständlicheres Resultat gilt für jedes der unendlichvielen Inkreis-Sechsecke aus gegebenen Seiten.