ÜBER POLYNOME MIT GANZEN RATIONALEN KOEFFIZIENTEN.

von

KURT MAHLER.

1. Im falgenden sei

$$f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

ein Polynom vom genauen Grad $n \geqq 3$ [1]) mit ganzen rationalen Koeffizienten und nichtverschwindenden Discriminante D; wir setzen

$$A = \left| (a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}} \right|$$

und nennen dies die Höhe von $f(x)$. Gleichzeitig mit $f(x)$ werde die zugehörige Binärform

$$F(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \dots + a^ny_n = y^nf\left(\frac{x}{y}\right)$$

betrachtet; sind

$$F_1(x, y) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2}y + \dots + a_{n-1}y^{n-1} = \frac{\delta F}{\delta x}$$

$$F_2(x, y) = a_1x^{n-1} + 2a_2x^{n-2}y + \dots + na_ny^{n-1} = \frac{\delta F}{\delta y}$$

ihre partiellen Ableitungen, so wird D gleich der Resultante von $F_1(x, y)$ und $F_2(x, y)$, also

$$D = \left| \begin{array}{ccccccc} na_0 & (n-1)a_1 & \dots & 2a_{n-2} & a_{n-1} & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & na_0 & (n-1)a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & 2a_2 & \dots & (n-1)a_{n-1} & na_n & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & a_1 & 2a_2 & \dots & na_n \end{array} \right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \\ a \end{array}}\right\} n-1 \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \\ a \end{array}}\right\} n-1 \text{ Zeilen} \end{array}$$

Unter $G_1(x, y)$ und $G_2(x, y)$ verstehen wir die beiden Determinanten, die aus D entstehen, wenn die erste Spalte

$$\left| \overbrace{na_0, 0, \dots, 0,}^{n-1} \overbrace{a_1, 0, \dots, 0}^{n-1} \right|$$

ersetzt wird durch die Spalte

1) Für $n = 1$ und $n = 2$ kann men auf trivialene Wege ähuluhe Ergebnisse wie in dieser Arbeit herleiten.

$$X_1 = | \overbrace{x^{n-2}, x^{n-3}y, \ldots, xy^{n-3}, y^{n-2}}^{n-1}, \overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{n-1} |$$

oder durch die Spalte

$$X_2 = | \overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{n-1}, \overbrace{x^{n-2}, x^{n-3}y, \ldots, xy^{n-3}, y^{n-2}}^{n-1} |.$$

Analog seien $H_1(x, y)$ und $H_2(x, y)$ die Determinanten, die aus D hervorgehen, wenn die letzte Spalte

$$| \overbrace{0, 0, \ldots, a_{n-1}}^{n-1}, \overbrace{0, 0, \ldots, na_n}^{n-1} |$$

von D durch die beiden vorigen neuen Spalten X_1 oder X_2 ersetzt werden. Also sind offenbar

$G_1(x, y)$, $G_2(x,y)$, $H_1(x,y)$, $H_2(x, y)$ Binärformen vom Grad $n-2$ mit ganzen rationalen Koeffizienten, und es gelten die Identitäten

$$(1): \quad \boxed{\begin{aligned} Dx^{2n-3} &= F_1(x, y) G_1(x, y) + F_2(x, y) G_2(x, y), \\ Dy^{2n-3} &= F_1(x, y) H_1(x, y) + F_2(x, y) H_2(x, y). \end{aligned}}$$

Es ist nicht schwer, eine obere Schranke fer den Abschutbetrag von D oder das Maximum der Koeffizienten von G_1, G_2, H_1, H_2 zuzugeben. Nach dem Hadamardschen Determinantensatz ist zunächst

$$D^2 \leq \{ (na_0)^2 + ((n-1)a_1)^2 + \ldots + a_{n-1}^2 \}^{n-1} \\ \{a_1^2 + (2a_2)^2 + \ldots + (na_n)^2\}^{n-1}.$$

Weiter gilt nach der Cauchyschen Ungleichung

$$\{ (na_0)^2 + ((n-1)a_1)^2 + \ldots + a_{n-1}^2 \}^2 \leq A^2(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2),$$
$$\{a_1^2 + (2a_2)^2 + \ldots + (na_n)^2\}^2 \leq A^2 (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2).$$

Ferner ist

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \leq n \,.\, n^2 = n^3,$$

so dass sich schliesslich die Ungleichung

$$(2): \quad \boxed{| D | \leq n^{3(n-1(} A^{2(n-1)}}$$

ergibt. Wendet man dieselben Überlegungen auf die Unterdeterminanten der ersten oder letzten Spalte von D an, so ergibt sich, dass die Koeffizienten aller vier Formen

$$G_1(x, y), G_2(x, y), H_1(x, y), H_2(x, y)$$

höchstens vorn Absolutbetrag

$$(3): \quad \boxed{n^{\frac{3}{2}(2n-3)} A^{2n-3}}$$

sind.

2. Wir wollen zuerst annehmen, das x und y irgend welehe reelle oder komplexe Zahlen sind, die nicht beide zugleich verschwinden, und setzen alsdann

$$|x, y| = \max(|x|, |y|).$$

Aus den Schranken (3) für die Koeffizienten von G_1, G_2, H_1, H_2 folgen dann unschwer die Abschätzungen

$$(4): \boxed{\begin{aligned}&\max(|G_1(x, y)|, |G_2(x, y)|, |H_1(x, y)|, |H_2(x, y)|)\\ &\qquad \leq n^{\frac{3}{2}(2n-3)+1} A^{2n-3} |x, y|^{n-2}\end{aligned}}$$

den jedes dieser vier Polynome hat den Grad $n - 2$ und also sogar weniger als n Terme $c_i x^i y^{n-i-2}$, wo $|c_i|$ höchstens gleich der Schranke (3) und $|x^i y^{n-i-2}| \leq |x, y|^{n-2}$ ist.

Aus den Uhgleichungen (4) und derjenigen Identität (1), deren linke seite den grösseren Absolutbetrag hat, folgt jetzt sogleich die Abschätzung

$$(5): \boxed{\max(|F_1(x, y)|, |F_2(x, y)|) \geqq \frac{|D| \, |x, y|^{n-1}}{2n^{3n-\frac{7}{2}} A^{2n-3}}}.$$

3. Um von der letzten Formel Anwendungen zu machen, wollen wir annehmen, dass $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ die sämtlichen wellen oder komplexen Nullstellen von $f(x)$ sind und dass hiervoor $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_{r_1}$ reell, $\xi_{r_1+1}, \xi_{r_1+2}, \ldots, \xi_{r_1+2_2}$ aber paarweise komplex conjugiert sind; es gilt also $r_1 + 2r_2 = n$, und eine der beiden Zahlen r_1 oder r_2 kann auch gleich Null sein. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\mathit{\Lambda} &= \max(|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_n|, 1),\\
\Delta &= \min_{\substack{i, j = 1, 2, \ldots, n\\ i \neq j}} (|\xi_i - \xi_j|),\\
\delta &= \min_{i = 1, 2, \ldots, 2r_2} (|I(\xi_{r_1+i})|),
\end{aligned}$$

wobei δ nur für $r_2 > 0$ definiert ist. Natürlich sind Δ und δ nach Definition positiv, den $f(x)$ hat nichtverschwindende Discriminante.

Die Zahl $\mathit{\Lambda}$ kann auftirviale Weise nach oben abgeschätzt werden. Für jede Wurzel ξ von $f(x) = 0$ ist

$$a_0 \xi = -\left(a_1 + a_2 \frac{1}{\xi} + \ldots . + a_n \frac{1}{\xi^{n-1}}\right),$$

und somit folgt insbesondere für $\varLambda > 1$:

$$| a_0 | \varLambda \leq \left| a_1 + \frac{a_2}{\mp \varLambda} + \frac{a_3}{(\mp \varLambda)^2} + \ldots + \frac{a_n}{(\mp V)^{n-1}} \right|$$

$$\leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots . + a_n^2)\left(1 + \frac{1}{\varLambda^2} + \frac{1}{\varLambda^4} + \frac{1}{\varLambda^6} + , \ldots\right)},$$

also wegen $| a_0 | \geqq 1$, $a_1^2 + a_2^2 + .. + a_n^2 \geqq \mathrm{A}^2 - 1$:

$$\varLambda^2 \leq (\mathrm{A}^2 - 1) \frac{\varLambda^2}{\varLambda^2 - 1}, \ \varLambda^2 \leq \mathrm{A}^2$$

und damit

(6): $$\boxed{\varLambda \leq \mathrm{A}}$$

schranken für Δ und δ ergeben sich dagegen folgendermassen:

Es ist

$$\mathrm{F}(x, y) = a_0(x - \xi_1 y)\ (x - \xi_2 y)\ \ldots .\ (x - \xi_n y),$$

also nach Differentiation in bezug auf x, bez. y und für $x = \xi_i$, $y = 1$:

$$\mathrm{F}_1(\xi_i, 1) = a_0 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\xi_j - \xi_i)$$

$$\mathrm{F}_2(\xi_i, 1) = - a_0 \xi_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\xi_i - \xi_j)$$

Somit ist

$$| a_0 | \max (| \xi_i |, 1) \left| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\xi_i - \xi_j) \right| \geqq \frac{| \mathrm{D} | \max (|\xi_i|, 1)^{n-1}}{2 n^{3n - \frac{2}{7}} \mathrm{A}^{2n-3}}$$

und wegen $| a_0 | \leq \mathrm{A}$, $\max (| \xi_i |, 1) \geqq 1$:

(7): $$\boxed{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} | \xi_j - \xi_i | \geqq \frac{| \mathrm{D} |}{2 n^{3n - \frac{7}{2}} \mathrm{A}^{2n-2}}}$$

Wegen $| \xi_i - \xi_j | \leq | \xi_i | + | \xi_j | \leq 2 \varLambda$

folgt hieraus weiter die Abschätzung für Δ:

(8): $$\boxed{\Delta \geqq \frac{| \mathrm{D} |}{2^{n-1} n^{3n - \frac{7}{2}} \mathrm{A}^{2n-2} \varLambda^{n-2}}}$$

oder wegen (6):

$$(9): \quad \boxed{\Delta \geqq \frac{|D|}{2^{n-1}\, n^{3n-\frac{7}{2}}\, A^{3n-4}}}$$

Speziell ist 2δ gleich der Differenx zweier konjugierter Nullstellen von $f(x)$, und somit:

$$(10): \quad \boxed{\delta \geqq \frac{|D|}{2^n\, n^{3n-\frac{7}{2}}\, A^{2n-2}\, \varDelta^{n-2}} \geqq \frac{|D|}{2^n n^{3n-\frac{7}{2}}\, A^{3n-4}}}$$

In allen diesen Ungleichnungen ist $|D| \geqq 1$, doch ist es für die Anwendungen besser, die vorige genauere Form zu benutzen.

6. Die Abschätzung (5) führt zu einer Ungleichung für $|F(x, y)|$. Durch logarithmische Ableitung von $F(x, y)$ nach x oder y erhält man zunächst die Identitäten

$$\frac{F_1(x,y)}{F\,(x,y)} = \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{x - \xi_h y} \quad \text{und} \quad \frac{F_2(x,y)}{F\,(x,y)} = -\sum_{h=1}^{n} \frac{\xi_h}{x - \xi_h y},$$

und hieraus folgt leicht:

$$|F(x,y)| \geqq |F_1(x,y)| \min_{h=1,2,\ldots,n} (|x - \xi_h y|)$$

und

$$|F(x,y)| \geqq \frac{|F_2(x,y)| \min\limits_{h=1,2,\ldots,n} (|x - \xi_h y|)}{\max\limits_{h=1,2,\ldots,n} (|\xi_h|)}.$$

Es ist aber

$$\max_{h=1,2,\ldots,n} (|\xi_h|) \leq \max(|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_n|, 1) = \varDelta \leq A$$

und somit folgt wegen $A \geqq 1$ in beiden Fällen

$$|F(x,y)| \geqq \frac{\max(|F_1(x,y)|, |F_2(x,y)|)}{A} \min_{h=1,2,\ldots,n} (|x - \xi_h y|)$$

und schliesslich wegen (5):

$$(11): \quad \boxed{|F(x,y)| \geqq \frac{|D| \min\limits_{h=1,2,\ldots,n} (|x - \xi_h y|)\, |x, y|^{n-1}}{2 n^{3n-\frac{7}{2}}\, A^{2n-2}}}$$

Für $y = 1$ ist hierin insbesondere enthalten:

$$(12): \quad \boxed{|f(x)| \geqq \frac{|D| \min\limits_{h=1,2,\ldots,n} (|x-\xi_h|)}{2n^{3n-\frac{7}{2}} A^{2n-2}} \text{ für } |x| = 1}.$$

5. Als Anwendung der ketzten Formel geben wir obere Schranken für das Linienmass M_1 der Menge m_1 aller reellen Punkte mit

$$|f(x)| \leq \frac{\epsilon}{4} n^{-3n+\frac{5}{2}} A^{-n-\alpha-1}, \; -t \leq x \leq +1$$

und für das Flachenmass M_2 der Menge m_2 aller komplexen Punkte mit

$$|f(x)| \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{4\pi} n^{-3n+3} A^{-\frac{n}{2}-\alpha-\frac{1}{2}}}, \qquad |x| \leq 1,$$

wo $\epsilon > 0$ und $\alpha > 0$ gegebene Zahlen sind; dabei wollen wir aber nachttäglich voraussetzen, dass

$$|D| \geqq A^{2n-2-\beta}$$

ist, wo $\beta > 0$ ebenfalls gegeben ist.

Die Menge m_1 ist wegen (12) ganz enthalten in den n Intervallen

$$|x-\xi_h| \leq \frac{\epsilon}{2n} A^{n-\alpha-3} |D|^{-1} \leq \frac{\epsilon}{2n} A^{-(n+1)-\alpha+\beta} (h=1,2,\ldots n)$$

und also folgt sogleich

$$(13): \quad \boxed{M_1 \leq \epsilon A^{-(n+1)-\alpha+\beta}}$$

Entsprechenderweise liegt jeder Punkt von m_2 in einem der n Kreise

$$|x-\xi_h| \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{\pi n} A^{3\frac{n}{2}-\alpha-\frac{5}{2}}} |D|^{-1} \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{\pi n} A^{-\frac{n+1}{2}-\alpha+\beta}}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, n)$$

und also folgt sogleich

$$(14): \quad \boxed{M_2 \leq \epsilon A^{-(n+1)-2\alpha+\beta}}$$

Die Formeln (13) und (14) sind nützlich bei der Untersuchung des Masses aller S-Zahlen; um sie in günstiger Form anzuwenden, muss man versuchen, eine obere Schranke für die Anzahl aller ganzzahligen Polgnome $f(x)$ vom Grad x mit

$$|D| < A^{+2n-2-\beta}, \quad a_0^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \leq A^2$$

herzuleiten.

6. Die Fundamentalformeln lassen sich auch in beeug auf die p-adischen Bewertungen anwenden. Sei p eine Primzahl, R_p der Körper aller p-adischen Zahlen, und seien

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\varsigma$$

nunmehr die sämtlichen p-adischen Wurzeln von $f(x) = 0$, wenn solche existieven. Sei weiter K_p die kleinste algebraische Erweiterung von R_p, in der $f(x)$ vollständig zerfällt; es gibt in diesem Köper also insgesamt n Nullstellen von $f(x)$, die wieder mit

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

bezeichnet seien. Beide Körper R_p und K_p sind bewertet durch die p-adische Bewertung $|\alpha|_p$; wir denken diese so vormiert, dass insbesondere

$$|p|_p = \frac{1}{p}$$

ist, und auf irgend eine Art in K_p fortgesetzt.

Unter x, y verstehen wir zwei p-adische Zahlen, die nicht beide zugleich verschwinden, und setzen

$$|x, y|_p = \max(|x|_p, |y|_p).$$

Dann folgt zunächst, das alle Koeffizienten von G_1, G_2, H_1, H_2 ganz rational sind, in Analogie zu (4):

(15):

$$\boxed{\max(|F_1(x,y)|_p, |F_2(x,y)|_p, |H_1(z,y)|_p, |H_2(x,y)^p|) \leq |x,y|_p^{n-2}}$$

Die Identitäten (1) führen also sogleich zu der Ungleichung

(16): $$\boxed{\max(|F_1(x,y)|_p, |F_2(x,y)_p|) \geqq |D|_p |x,y|_p^{n-1}}$$

Sei weiter

$$A = \max(|\xi_1|_p, |\xi_2|_p, \ldots, |\xi_n|_p, 1)$$
$$\Delta = \min_{\substack{i,j=1,2,\ldots,n \\ i \neq j}} (|\xi_i - \xi_j|_p).$$

Da bekanntlich alle n Zahlen $a_0\xi_1, a_0\xi_2, \ldots, a_0\xi_n$ ganz algebraisch also ganz p-adisch sind, so ist gewiss trivialerweise

(17): $$\boxed{A \leq \frac{1}{|a_0|_p} \leq A.}$$

Weiter ist wieder

$$F_1(\xi_i, 1) = a_0 \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (\xi_i - \xi_j)$$

$$F_2(\xi_i, 1) = - a_0 \xi_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (\xi_i - \xi_j)$$

Somit ist wegen (16):

$$|a_0|_p \max(|\xi_i|_p, 1) \prod_{\substack{j=1\\ i\neq j}} |\xi_i - \xi_j|_p \geqq |D|_p \max(|\xi_i|_p, 1)^{n-1}$$

und wegen (17) sogar

$$(18): \quad \boxed{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |\xi_i - \xi_j|_p \geqq |D|_p \max(|\xi_i|_p, 1)^{n-1} \geqq |D|_p}$$

Wegen

$$|\xi_i - \xi_j|_p \leq \max(|\xi_i|_p, |\xi_i|_p) \leq \frac{1}{|a_0|_p} \leq A$$

folgt hieraus noch weiter

$$(19): \quad \boxed{\Delta \geqq |a_0^{n-2} D|_p \geqq \frac{1}{A^{n-2}|D|}}$$

Als letzte Anwendung benutzen wir die schon früher aufgestelten Identitäten

$$\frac{F_1(x,y)}{F(xy)} = \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{x - \xi_h y} \text{ und } \frac{F_2(x,y)}{F(x,y)} = -\sum_{h=1}^{n} \frac{\xi_h}{x - \xi_h y};$$

es ergibt sich

$$|F(x,y|_p \geqq |F_1(x,y)|_p \min_{h=1,2,\ldots,n} (|x - \xi_h y|_p),$$

$$|F(x,y)|_p \geqq \frac{|F_2(x,y)|_p \min\limits_{6=1.2,\ldots,n} (|x - \xi_h y|_p)}{\max(|\xi_1|_p, \ldots, \xi_n|_p)}$$

und damit

$$|F(x,y)|_p \geqq \frac{\max(|F_1(x,y)|_p, |F_2(x,y)|_p)}{\Delta} \min(|x - \xi_h y|_p),$$

also wegen (16) und (17):

$$(20): \quad \boxed{|F(x,y)|_p \geqq |a_0 D|_p \min_{h=1,2,\ldots,n} (|x - \xi_h y|_p) |x, y|_p^{n-1}}$$

Insbesondere ist demnach für $py = 1$:

(21): $$\boxed{|f(x)|_p \geqq |a_0 D|^{p'} \min_{h=1,2,\ldots,n} (|x-\xi_h|_p) \text{ für } |x|_p \leq 1}$$

Diese Ungleichung kann zu ähnlichen Abschätzungen wie im § 5 herangezogen werden. Ist speziell $|a_0 D|_p = \Delta$, so ist es erlaubt,

$$\min_{h=1,2,\ldots,n} (|x-\xi_h y|_p) \text{ durch } \min_{h=1,2,\ldots,S} (|x-\xi_h y|_p)$$

zu ersetzen.

Die vorangehenden Formeln (11) und (20) ergeben für ganzes rationales x, y und willkürlich viele verschiedene Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_t$ auch eine Abschätzung für

$$|F(x, y)|, \prod_{\tau=1}^{t} |F(x, y)|_{p_\tau};$$

wegen

$$|D| \prod_{\tau=1}^{t} |D|_{p_\tau} \geqq 1, \quad \prod_{\tau=1}^{t} |a_0|_{p_\tau} \geqq \frac{1}{A}$$

wird

(22):

$$\boxed{\begin{aligned}&|F(x, y)| \prod_{\tau=1}^{t} |F(x, y)|_{p_\tau} \geqq \\ &\geqq \frac{\min\limits_{h=1,2,\ldots,n} (|x-\xi_h y|) \prod\limits_{\tau=1}^{t} (|x-\xi_h^{(\tau)} y|_{p_\tau})}{2n^{3n-\frac{7}{2}} A^{2n-1}} |x, y|^{n-1} (x, y)^{-(n-1)}\end{aligned}}$$

Dabei sind jetzt

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

die reellen oder komplexen Nullstellen von $f(x)$,

$$\xi_1^{(\tau)}, \xi_2^{(\tau)}, \ldots, \xi_n^{(\tau)}$$

dagegen die Nullstellen von $f(x)$ in K_{p_τ}. Es ist bemerkenswett, dass D aus dieser Formel heraus gefallen ist. Der Faktor $(x, y)^{-(n-1)}$, wo (x, y) den grössten gemeinsamen Teiler von x und y darstellt, kann auch durch

$$\prod_{\tau=1}^{t} |x, y|_{p_\tau}^{n-1} \geqq (x, y)^{-(n-1)}$$

ersetzt werden.