104 104

Dai «Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei»
(Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali)
serie VIII, vol. V, fasc. 5

Geometria dei numeri. — *Sui determinanti minimi delle sezioni di un corpo convesso.* Nota di KURT MAHLER, presentata [*] dal Corrisp. B. SEGRE.

Siano x_1, x_2, x_3 coordinate cartesiane ortogonali in uno spazio euclideo ordinario, nel quale consideriamo un corpo convesso finito, K, simmetrico rispetto all'asse x_3. L'intersezione K_z di K col piano

$$\pi_z: \quad x_3 = z$$

è pertanto un dominio convesso, simmetrico rispetto al punto $O_z(0, 0, z)$ dove π_z incontra l'asse x_3. Nell'ipotesi che K_z non sia vuoto per

$$z_1 < z < z_2,$$

l'area $V(K_z)$ di K_z soddisfa alla disuguaglianza

$$V(K_z)^{1/2} \geq (1-t)\, V(K_{z_1})^{1/2} + t\, V(K_{z_2})^{1/2} \quad \text{per} \quad z = (1-t)\, z_1 + t z_2, \ 0 \leq t \leq 1,$$

in virtù di un teorema dimostrato da H. Brunn nella sua tesi [1]. In questa Nota deduco da questo teorema analogo risultato relativo al determinante minimo $\Delta(K_z)$ di K_z.

Onde rammentare il significato di $\Delta(K_z)$, denotiamo con Λ_z un qualunque reticolato a due dimensioni che contenga O_z ed appartenga a π_z, e con $d(\Lambda_z)$ il determinante di questo reticolato (ossia il doppio del minimo dell'area dei triangoli coi vertici in tre punti non allineati di Λ_z). Dicendo che Λ_z è K_z-ammissibile quando O_z risulti il solo punto di Λ_z interno a K_z, il determinante minimo $\Delta(K_z)$ è, per definizione, l'estremo inferiore di $d(\Lambda_z)$ esteso ai vari reticolati K_z-ammissibili di π_z. Ciò premesso, possiamo enunciare il

TEOREMA. – *Il determinante minimo* $\Delta(K_z)$ *della sezione* K_z *di* K *soddisfa alla disuguaglianza*

$$\Delta(K_z)^{1/2} \geq (1-t)\, \Delta(K_{z_1})^{1/2} + t\, \Delta(K_{z_2})^{1/2} \tag{1}$$
$$\textit{per} \quad z = (1-t)\, z_1 + t z_2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(*) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) *Ovale und Eiflächen*, Munich 1887.

DIMOSTRAZIONE. - Sia H_ζ un esagono di π_ζ circoscritto a K_ζ, simmetrico rispetto ad O_ζ, avente area minima, $V(H_\zeta)$, e denotiamo con

$$L_\zeta^{(1)}, L_\zeta^{(2)}, \cdots, L_\zeta^{(6)}$$

le rette che ne contengono ordinatamente i lati. Allora

$$L_\zeta^{(1)} \text{ ed } L_\zeta^{(4)} \quad , \quad L_\zeta^{(2)} \text{ ed } L_\zeta^{(5)} \quad , \quad L_\zeta^{(3)} \text{ ed } L_\zeta^{(6)}$$

saranno coppie di rette simmetriche rispetto ad O_ζ, e ciascuna di quelle sei rette sarà retta d'appoggio di K_ζ. Ne discende che vi sono sei piani d'appoggio di K:

$$M_\zeta^{(1)}, M_\zeta^{(2)}, \cdots, M_\zeta^{(6)},$$

tali che $M_\zeta^{(j)}$ contenga $L_\zeta^{(j)}$ $(j = 1, 2, \cdots, 6)$, e che

$$M_\zeta^{(1)} \text{ ed } M_\zeta^{(4)} \quad , \quad M_\zeta^{(2)} \text{ ed } M_\zeta^{(5)} \quad , \quad M_\zeta^{(3)} \text{ ed } M_\zeta^{(6)}$$

siano coppie di piani simmetrici rispetto all'asse x_3 (e quindi incontranti quest'asse nello stesso punto, proprio od improprio).

I sei piani $M_\zeta^{(j)}$ determinano sui piani $x_3 = \zeta_1$ ed $x_3 = \zeta_2$ due esagoni, H_{ζ_1}, H_{ζ_2}, i quali rispettivamente risultano simmetrici rispetto ad O_{ζ_1}, O_{ζ_2} e contengono K_{ζ_1}, K_{ζ_2}. Denotiamo con K^* il solido limitato dai sei piani $M_\zeta^{(j)}$ e dai piani $x_3 = \zeta_1$, $x_3 = \zeta_2$. Esso è manifestamente un corpo convesso, simmetrico rispetto all'asse x_3. Applicando il teorema di Brunn alle sue tre sezioni $H_\zeta, H_{\zeta_1}, H_{\zeta_2}$, si ottiene che

$$V(H_\zeta)^{1/2} \geqq (1-t)\, V(H_{\zeta_1})^{1/2} + t\, V(H_{\zeta_2})^{1/2}. \tag{2}$$

Ora un teorema di K. Reinhardt (2) e mio (3) afferma che

$$\Delta(K_\zeta) = \frac{1}{4} \min V(H),$$

ove il minimo va esteso a tutti gli esagoni H di π_ζ simmetrici rispetto ad O_ζ e contenenti K_ζ. Dunque

$$\Delta(K_\zeta) = \frac{1}{4} V(H_\zeta), \tag{3}$$

ed inoltre

$$\Delta(K_{\zeta_1}) \leqq \frac{1}{4} V(H_{\zeta_1}) \quad , \quad \Delta(K_{\zeta_2}) \leqq \frac{1}{4} V(H_{\zeta_2}). \tag{4}$$

In virtù delle (3), (4), la (1) segue subito dalla (2).

Sarebbe interessante vedere in quali casi nella (1) vale il segno di uguaglianza, ed estendere il teorema qui dimostrato ai corpi di dimensione $n > 3$.

(2) « Abh. Math. Sem. Hamburg », *10*, 216-230 (1934).
(3) « Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam », *50*, 692-703 (1947).

Roma, 1948. — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei.