

Ueber die Nullstellen
der
unvollständigen Gammafunktionen.

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Universität zu Frankfurt a. M.
vorgelegt
von
KURT MAHLER
aus Krefeld.

UEBER DIE NULLSTELLEN DER UNVOLLSTAENDIGEN GAMMAFUNKTIONEN.

Von **Kurt Mahler** (Krefeld).

Estratto dal tomo LIV (1930) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.
Adunanza dell'8 aprile 1928.

Die in dieser Arbeit behandelte Frage lässt sich als ein Einzelfall des folgenden allgemeinen Problems auffassen:

«Die meromorphe Funktion $P_\lambda(z)$ von z strebe in der ganzen Ebene mit wachsenden Werten des Parameters λ gegen die meromorphe Funktion $E(z)$ mit dem PICARDSchen Ausnahmewert O . In welcher Beziehung stehen die Nullstellen von $P_\lambda(z)$ und die der Funktion $Q_\lambda(z) = E(z) - P_\lambda(z)$ zu der Konvergenz dieser Funktionen gegen $E(z)$?»

In dieser Arbeit ist die Grenzfunktion, die Gammafunktion $\Gamma(z)$, nie gleich Null; als Annäherungsfunktionen sind die beiden unvollständigen Gammafunktionen

$$P_\lambda(z) = \int_0^\lambda e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$Q_\lambda(z) = \int_\lambda^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

zu betrachten; es besteht die Identität

$$P_\lambda(z) + Q_\lambda(z) = \Gamma(z).$$

$P_\lambda(z)$ ist meromorph; $Q_\lambda(z)$ stellt dagegen eine ganze Funktion dar.

Ueber die Nullstellen dieser Funktionen gibt es eine Reihe von Arbeiten; sie beziehen sich fast nur auf den Fall $\lambda = 1$.

Als erster untersuchte BOURGUET, (1, 2), die Nullstellen von $P_1(z)$ eingehend; er zeigte, dass $P_1(z)$ in den unendlich vielen Intervallen

$$(-2n - 2, -2n - 3/2), \quad (-2n - 3/2, -2n - 1) \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

je mindestens eine Nullstelle besitzt und dass diejenigen, die zu grossen n gehören, in die Pole hineinrücken. Er gelangte zu der Vermutung, dass $P_1(z)$ höchstens 4

komplexe Nullstellen besitzt. Später zeigte HASKIN, (5), dass $P_1(\lambda)$ in den obigen Intervallen genau je eine Nullstelle hat. Dann bewies GRONWALL, (4), dasselbe noch einmal; er bestimmte genauere Intervalle für die Nullstellen und zeigte die Existenz von genau 4 nichtreellen Nullstellen; diese bestimmte dann FRANKLIN, (3), angenähert. WALTHER, (9), gab bessere Schranken für die reellen Nullstellen von $P_1(\lambda)$ und asymptotische Formeln für die reellen Nullstellen mit grossem absolutem Betrag.

LINDHAGEN, (6), bewies, dass alle Nullstellen von $Q_1(\lambda)$ in der Halbebene $\Re(\lambda) > 1$ liegen; seinen Beweis dehnte NIELSEN, (7), dahin aus, dass alle Nullstellen von $Q_\lambda(\lambda)$, $\lambda > 0$ sich in der Halbebene $\Re(\lambda) > \lambda$ befinden. Eine eingehendere Untersuchung von $Q_\lambda(\lambda)$ stammt von JENSEN; nach seinen hinterlassenen Papieren hat RASCH, (8), diese Untersuchungen ausgearbeitet und veröffentlicht.

In der vorliegenden Arbeit wird der allgemeine Fall, dass λ beliebige positive grosse Werte annimmt, behandelt; es wird sogar weitgehender zugelassen, dass λ im Winkelraum

$$|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \alpha > 0$$

liegt. Das Hauptergebnis lautet dann:

Wenn λ auf dem Strahl

$$\lambda = |\lambda| e^{\varphi i}, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \varphi = \text{const.}$$

ins Unendliche rückt, so häufen sich die Nullstellen von $P_\lambda(\lambda z)$ dicht gegen jeden Punkt der Halbgeraden

$$e^{\varphi i} z < 0$$

zwischen den Punkten

$$-\infty \cdot e^{-\varphi i} \quad \text{und} \quad r_0(\varphi) e^{-\varphi i}, \quad r_0 \log \frac{r_0}{e} = \cos \varphi,$$

ferner gegen eine geschlossene, linsenförmige Kurve $\mathfrak{R}_\lambda^{(2)}(\varphi)$, die durch die Gleichung

$$\Re\{(\lambda \log \lambda + 1 - \lambda) e^{\varphi i}\} = 0, \quad \Re(e^{\varphi i} (1 - \lambda)) \geq 0$$

definiert ist; im Innern von $\mathfrak{R}_\lambda^{(2)}(\varphi)$ gilt:

$$P_\lambda(\lambda z) \sim \Gamma(\lambda z), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Die Nullstellen von $Q_\lambda(\lambda z)$ häufen sich dicht gegen jeden Punkt einer Kurve $\mathfrak{R}_\lambda^{(1)}(\varphi)$ ähnlich der Neilschen Parabel von der Gleichung

$$\Re\{(\lambda \log \lambda + 1 - \lambda) e^{\varphi i}\} = 0, \quad \Re(e^{\varphi i} (1 - \lambda)) \leq 0.$$

Rechts von $\mathfrak{R}_\lambda^{(1)}(\varphi)$ gilt in jedem Punkt

$$Q_\lambda(\lambda z) \sim \Gamma(\lambda z).$$

Weiter wird für grosses $\lambda > 0$ die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von $P_\lambda(z)$ asymptotisch bestimmt.

Um diese Untersuchungen zu ermöglichen, bringt das erste Kapitel einige allgemeinere Hilfssätze; im zweiten Kapitel werden asymptotische Reihen für die Funktionen $Q_\lambda(\lambda z)$ und $P_\lambda(\lambda z)$ hergeleitet. Das dritte und vierte Kapitel bringt dann die eigentlichen Beweise.

Nachdem diese Arbeit bereits eingeleitet war, teilten mir die Herren Prof. Dr. E. HILLE und G. RASCH mit, dass auch sie sich mit den Nullstellen der Unvollständigen Gammafunktionen beschäftigt haben. Während sich die Untersuchungen von Herrn Prof. HILLE auf allgemeine Reihen beziehen und fast nicht mit den meinigen zusammenhängen, ist Herr RASCH unabhängig von mir zu gewissen Erweiterungen der Ergebnisse des letzten Kapitels gelangt. Diese Arbeiten werden demnächst erscheinen.

KAPITEL I.

UMKEHRSÄTZE.

1. Es bedeute $\mathfrak{F}_z(\mathfrak{F}_w)$ einen beschränkten, einfachzusammenhängenden Bereich ¹⁾ ohne Verzweigungspunkte und mit stückweise analytischem Rande $\mathfrak{S}_z(\mathfrak{S}_w)$ auf einer RIEMANNschen z -Fläche (w -Fläche); $w = f(z)$ und $z = g(w)$ die zueinander inversen Funktionen, welche \mathfrak{F}_z und \mathfrak{F}_w einschliesslich des Randes eineindeutig und konform aufeinander abbilden. Die Ableitung

$$f'(z) = \frac{1}{g'(w)}$$

ist in jedem Punkte von \mathfrak{F}_z oder \mathfrak{F}_w beschränkt und ungleich 0; daher genügt sie der Ungleichung:

$$0 < a \leq |f'(z)| \leq A$$

in jedem Punkte von \mathfrak{F}_z , mit zwei endlichen Konstanten a und A .

2. Weiter bedeute λ einen reellen oder komplexen Parameter, der in einer festen

¹⁾ Bereiche sind als abgeschlossen zu betrachten. Für die Definition von Gebiet und Bereich siehe:

Punktmenge ins Unendliche wandern kann; $f_\lambda(\zeta, w)$ eine in ζ und w reguläre Funktion, falls (ζ, w) in oder auf dem Rande von \mathfrak{F}_ζ (\mathfrak{F}_w) liegt, und die noch von λ abhängt. Das Maximum

$$M(\lambda) = \max |f_\lambda(\zeta, w)|, \quad \zeta \text{ in } \mathfrak{F}_\zeta, w \text{ in } \mathfrak{F}_w$$

genüge der Limesgleichung:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} M(\lambda) = 0.$$

Ferner bezeichne \mathfrak{G}_ζ einen einfach zusammenhängenden Teilbereich ganz im Innern von \mathfrak{F}_ζ , \mathfrak{G}_w dessen Bild, das ganz im Innern von \mathfrak{F}_w liegt; \mathfrak{T}_ζ und \mathfrak{T}_w die zugehörigen Ränder, die wir als stückweise analytisch annehmen. Zuzufolge dieser Annahmen hat \mathfrak{S}_ζ von \mathfrak{G}_ζ den Mindestabstand $\delta_\zeta > 0$, \mathfrak{S}_w von \mathfrak{G}_w einen Mindestabstand $\delta_w > 0$.

Wir beschränken ζ auf \mathfrak{G}_ζ , w auf \mathfrak{G}_w . Alsdann gilt nach dem CAUCHYSCHEN Integralsatz ²⁾:

$$\frac{\partial^{n_1+n_2} f_\lambda(\zeta, w)}{\partial \zeta^{n_1} \partial w^{n_2}} = \frac{n_1! n_2!}{(2\pi i)^2} \int_{\mathfrak{S}_\zeta} \int_{\mathfrak{S}_w} \frac{f_\lambda(\delta, w) d\delta dw}{(\delta - \zeta)^{n_1+1} (w - w)^{n_2+1}}.$$

Bedeutet L_ζ (L_w) die Bogenlänge von \mathfrak{S}_ζ (\mathfrak{S}_w), so ist also:

$$\left| \frac{\partial^{n_1+n_2} f_\lambda(\zeta, w)}{\partial \zeta^{n_1} \partial w^{n_2}} \right| \leq \frac{n_1! n_2!}{(2\pi)^2} \frac{L_\zeta L_w}{\delta_\zeta^{n_1+1} \delta_w^{n_2+1}} \cdot M(\lambda),$$

d. h. gleichmässig in beiden Veränderlichen für $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\frac{\partial^{n_1+n_2} f_\lambda(\zeta, w)}{\partial \zeta^{n_1} \partial w^{n_2}} = O(M(\lambda)).$$

3. Endlich bedeute noch \mathfrak{H}_ζ einen Bereich, der ganz im Innern von \mathfrak{G}_ζ liegt, \mathfrak{H}_w dessen Bild, das ganz im Innern von \mathfrak{G}_w gelegen ist; ζ eine beliebige Zahl in \mathfrak{H}_ζ , ω das Bild in \mathfrak{H}_w :

$$\omega = f(\zeta), \quad \zeta = g(\omega).$$

Die Gleichung

$$f(\zeta) = \omega + f_\lambda(\zeta, \omega)$$

soll, wenn $|\lambda|$ sehr gross ist, untersucht werden.

Ist $\lambda = \infty$, so wird diese Gleichung identisch mit:

$$f(\zeta) = \omega,$$

die genau eine Wurzel $\zeta = \zeta$ hat. Nach dem CAUCHYSCHEN Integralsatz ist daher:

$$I(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{T}_\zeta} \frac{f'(\delta)}{f(\delta) - \omega} d\delta = 1,$$

da dies Integral die Anzahl der Nullstellen von $f(\zeta) - \omega$ innerhalb von \mathfrak{G}_ζ gibt.

²⁾ Integrationen über geschlossene Wege sind in positiver Richtung zu erstrecken.

Entsprechend wird die Anzahl der Nullstellen von $f(\zeta) - \omega - f_\lambda(\zeta, \omega)$ in \mathfrak{G}_ζ durch das Integral

$$I_\lambda(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{I}_\zeta} \frac{f'(\zeta) - f'_\lambda(\zeta, \omega)}{f(\zeta) - \omega - f_\lambda(\zeta, \omega)} d\zeta; \quad f'_\lambda(\zeta, \omega) = \frac{\partial}{\partial \zeta} f_\lambda(\zeta, \omega)$$

gegeben. Es ist aber:

$$I_\lambda(\omega) = I(\omega) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{I}_\zeta} \frac{f'(\zeta)f_\lambda(\zeta, \omega) - (f(\zeta) - \omega)f'_\lambda(\zeta, \omega)}{\{f(\zeta) - \omega\}\{f(\zeta) - \omega - f_\lambda(\zeta, \omega)\}} d\zeta$$

und auf dem Integrationsweg \mathfrak{I}_ζ gleichmässig in ζ und ω :

$$f_\lambda(\zeta, \omega) = O(M(\lambda)), \quad f'_\lambda(\zeta, \omega) = O(M(\lambda)),$$

während die andern Faktoren des Zählers beschränkt sind. Bedeutet $\delta > 0$ den Mindestabstand zwischen \mathfrak{I}_ω und \mathfrak{I}'_ω und wird $|\lambda|$ so gross genommen, dass

$$|f_\lambda(\zeta, \omega)| \leq \frac{\delta}{2},$$

so ist der Nenner des Integranden absolut genommen mindest gleich $\frac{\delta^2}{2}$. Folglich ist gleichmässig in ω :

$$I_\lambda(\omega) = I(\omega) + O(M(\lambda)) = 1 + o(1)$$

und als ganze Zahl daher für hinreichend grosse $|\lambda|$:

$$I_\lambda(\omega) = 1.$$

Somit gibt es dann genau eine Wurzel der Gleichung:

$$f(\zeta) = \omega + f_\lambda(\zeta, \omega).$$

4. Ist hiernach für grosse $|\lambda|$ ζ eine eindeutige Funktion von ω , so ist umgekehrt alsdann auch ω eindeutig in ζ . Denn bei festem ζ in \mathfrak{H}_ζ ist die Anzahl der Wurzeln von

$$f(\zeta) = \omega + f_\lambda(\zeta, \omega)$$

innerhalb von \mathfrak{G}_ω gleich

$$J_\lambda(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{I}_\omega} \frac{1 + \frac{\partial}{\partial \omega} f_\lambda(\zeta, \omega)}{\omega + f_\lambda(\zeta, \omega) - f(\zeta)} d\omega,$$

und dies unterscheidet sich für grosses $|\lambda|$ beliebig wenig von

$$J(\zeta) = \int_{\mathfrak{I}_\omega} \frac{d\omega}{\omega - f(\zeta)} = 1.$$

5. Es gelingt leicht, ζ als Funktion von ω explizit darzustellen. Nach dem CAUCHY-
schen Integralsatz ist

$$\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{z}_\lambda} \delta \frac{f'(\zeta) - f'_\lambda(\zeta, \omega)}{f(\zeta) - \omega - f_\lambda(\zeta, \omega)} d\zeta.$$

Dieser Darstellung entnimmt man, dass $\zeta = \zeta_\lambda(\omega)$ in ω regulär ist, wenn $|\lambda|$ hinrei-
chend gross. Durch die Substitution

$$\zeta = g(\omega), \quad \delta = g(\omega), \quad f'(\zeta)g'(\omega) = 1$$

geht das Integral über in

$$\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{z}_w} g(\omega) \frac{1 - g'(\omega)f'_\lambda(g(\omega), \omega)}{g(\omega) - \omega - f_\lambda(g(\omega), \omega)} d\omega.$$

Auf dem Integrationsweg ist nach den bisherigen Annahmen:

$$|\omega - \omega| \geq \delta,$$

ferner, wenn $|\lambda|$ hinreichend gross ist, gleichmässig in ζ und ω :

$$|f_\lambda(g(\omega), \omega)| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Bedeutet jetzt k eine natürliche Zahl, so ist identisch:

$$\frac{1}{g(\omega) - \omega - f_\lambda(g(\omega), \omega)} = \sum_{\nu}^k \frac{\{f_\lambda(g(\omega), \omega)\}^\nu}{(g(\omega) - \omega)^{\nu+1}} + \frac{\{f_\lambda(g(\omega), \omega)\}^k}{(g(\omega) - \omega)^k \{g(\omega) - \omega - f_\lambda(g(\omega), \omega)\}}$$

Durch Multiplikation dieser Identität mit $\frac{1}{2\pi i} g(\omega) \{1 - g'(\omega)f'_\lambda(g(\omega), \omega)\}$ und Inte-
gration über \mathfrak{z}_w folgt nach dem Satz von CAUCHY:

$$(I_\alpha) \quad \zeta = \sum_{\nu}^{k-1} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \right)^\nu [g(\omega) \{1 - g'(\omega)f'_\lambda(g(\omega), \omega)\} \{f_\lambda(g(\omega), \omega)\}^\nu]_{w=\omega} + O(M(\lambda)^k)$$

und falls k über alle Grenzen wächst:

$$(I_\beta) \quad \zeta = \sum_{\nu}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \right)^\nu [g(\omega) \{1 - g'(\omega)f'_\lambda(g(\omega), \omega)\} \{f_\lambda(g(\omega), \omega)\}^\nu]_{w=\omega}.$$

Wenn $|\lambda|$ hinreichend gross ist, gelten diese Formeln gleichmässig für alle ω in \mathfrak{G}_w .
Für $k = 2$ erhält man aus der ersten Formel:

$$(I_\gamma) \quad \zeta = \zeta + \frac{f_\lambda(\zeta, \omega)}{f'(\zeta)} + O(M(\lambda)^2).$$

6. Die letzten Formeln gelten gleichmässig, wenn ω in \mathfrak{G}_w liegt. Nun liegt \mathfrak{G}_w

ganz in \mathfrak{G}_w , \mathfrak{G}_w ganz im Innern von \mathfrak{F}_w . Wenn aber \mathfrak{G}_w irgend ein Bereich ganz im Innern von \mathfrak{F}_w ist, so existiert nach den Grundlagen der Topologie ein Zwischenbereich \mathfrak{G}_w , der einfach zusammenhängt, ganz im Innern von \mathfrak{F}_w liegt und \mathfrak{G}_w ganz in seinem Innern enthält. Aus dem Beweis des Formelsystems (1) folgt daher, dass für hinreichend grosses $|\lambda|$ diese Formeln gleichmässig in ω in jedem Bereich \mathfrak{G}_w gelten, der ganz im Innern von \mathfrak{F}_w liegt ³⁾.

Neben den vorigen Formeln wird später von zwei Umkehrsätzen Gebrauch gemacht.

SATZ 1. — Die Funktion $F(z)$ sei im Kreis \mathfrak{K} :

$$|z| \leq r > 0$$

regulär und für reelles x selbst reell; in \mathfrak{K} sei

$$|F'(z)| < 1.$$

Dann besitzt die Gleichung

$$z = F(z)$$

in \mathfrak{K} höchstens eine und zwar reelle Wurzel.

Denn wenn die Gleichung eine komplexe Wurzel:

$$z = x + yi, \quad x^2 + y^2 \leq r^2, \quad y \neq 0$$

hat, so ist

$$F(z) = F(x) + \int_0^{yi} F'(x + t) dt$$

oder, wenn man den imaginären Teil nimmt:

$$\Im\{F(z)\} = \Im\left\{\int_0^{yi} F'(x + t) dt\right\}.$$

Aus der Gleichung für z und der Annahme über $F'(z)$ folgt daher:

$$y = \Im\left\{\int_0^{yi} F'(x + t) dt\right\} = zy \quad |z| < 1,$$

was einen Widerspruch darstellt.

Die Gleichung

$$z = F(z)$$

³⁾ Wegen des Beweises dieser Formeln siehe:

E. LINDELÖF, *Le calcul des résidus, et ses applications à la théorie des fonctions* (Paris, Gauthier-Villars, 1905), S. 20. Offenbar sind die Formeln mit den LAGRANGESchen im Wesentlichen identisch.

hat also nur reelle Wurzeln; sie hat aber höchstens eine einfache innerhalb von \mathfrak{R} , denn nach dem Satz von ROLLE wäre sonst in einem Punkte gegen die Annahme:

$$1 = F'(z).$$

SATZ 2. — Die Funktion $f(z, w)$ sei im Bereich

$$|z - z_0| \leq \rho > 0, \quad |w - w_0| \leq \sigma > 0$$

regulär; im Punkte $z = z_0, w = w_0$ sei

$$\left. \frac{\partial^k f(z, w)}{\partial w^k} \right|_{\substack{z=z_0 \\ w=w_0}} = \begin{cases} 0 & k = 0, 1, 2, \dots, l-1 \\ A_{0l} \neq 0 & k = l \end{cases}$$

Alsdann wird durch die Gleichung

$$f(z, w) = 0$$

in einer endlichen Umgebung von $z = z_0, w = w_0$ eine stetige, nicht notwendig eindeutige Funktion definiert durch $w = w(z)$.

Denn für $|z - z_0| \leq \rho, |w - w_0| \leq \sigma$ ist:

$$f(z, w) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty A_{hk} (z - z_0)^h (w - w_0)^k; \quad A_{hk} = \frac{1}{h! k!} \frac{\partial^{h+k} f(z, w)}{\partial z^h \partial w^k}.$$

Mit den Abkürzungen

$$\eta(w) = \frac{1}{A_{0l}} \sum_{l+1}^\infty A_{0k} (w - w_0)^{k-l};$$

$$F(z, w) = \sum_1^\infty \sum_0^\infty A_{lk} (z - z_0)^{l-1} (w - w_0)^k; \quad \Phi(z, w) = \frac{F(z, w)}{A_{0l}(1 + \eta(w))}$$

geht die Gleichung $f(z, w) = 0$ über in

$$\psi(z, w) \equiv (w - w_0)^l + \Phi(z, w)(z - z_0) = 0.$$

Sei jetzt $\sigma^* \leq \sigma, \sigma^* > 0$ durch die Forderung

$$|\eta(w)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad |w - w_0| \leq \sigma^*$$

bestimmt.

Für $|w - w_0| \leq \sigma^*$ ist also $|1 + \eta(w)| \geq \frac{1}{2}$, und daher ist auch für $|z - z_0| \leq \rho, |w - w_0| \leq \sigma^*$ der Wert von

$$\Phi(z, w) = \frac{F(z, w)}{A_{0l}(1 + \eta(w))}$$

und der Wert von

$$\Phi'(\zeta, w) \equiv \frac{\partial}{\partial w} \Phi(\zeta, w) = \frac{(1 + \eta(w)) \frac{\partial}{\partial w} F(\zeta, w) - F(\zeta, w) \cdot \eta'(w)}{A_{01} (1 + \eta(w))^2}$$

beschränkt, etwa:

$$|\Phi(\zeta, w)| \leq M, \quad |\Phi'(\zeta, w)| \leq M' \quad \text{für} \quad |\zeta - \zeta_0| \leq \rho, \quad |w - w_0| \leq \sigma^*.$$

Die Anzahl der Wurzeln von $\psi(\zeta, w) = 0$ innerhalb des Kreises \mathfrak{R}_δ : $|w - w_0| \leq \delta \leq \sigma^*$ ist aber gleich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}_\delta} \frac{\partial}{\partial w} \log \psi(\zeta, w) dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}_\delta} \frac{l(w - w_0)^{l-1} + \Phi'(\zeta, w)(\zeta - \zeta_0)}{(w - w_0)^l + \Phi(\zeta, w)(\zeta - \zeta_0)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}_\delta} \left\{ \frac{l}{(w - w_0)} + (\zeta - \zeta_0) \frac{(w - w_0)\Phi'(\zeta, w) - l\Phi(\zeta, w)}{(w - w_0)\{(w - w_0)^l + \Phi(\zeta, w)(\zeta - \zeta_0)\}} \right\} dw = l + \varkappa, \end{aligned}$$

wo

$$|\varkappa| \leq \delta |\zeta - \zeta_0| \frac{\delta M' + lM}{\delta \{\delta^l - M|\zeta - \zeta_0|\}}$$

beliebig klein ist, wenn $|\zeta - \zeta_0|$ genügend klein. Für

$$|\zeta - \zeta_0| \leq \varepsilon(\delta) > 0$$

liegen also in \mathfrak{R}_δ genau l Wurzeln und $w = w(\zeta)$ ist folglich eine l -deutige stetige Funktion von ζ .

KAPITEL II.

ASYMPTOTISCHE FORMELN.

I. ζ , λ , t seien drei komplexe Veränderliche, von denen λ und t der Bedingung

$$|\arg \lambda| < \pi, \quad |\arg t| < \pi$$

genügen. Die vier Funktionen

$$\log \lambda, \quad \log t, \quad \lambda^\zeta, \quad t^\zeta$$

seien eindeutig festgelegt durch die Bestimmung:

$$|\Im(\log \lambda)| < \pi, \quad |\Im(\log t)| < \pi; \quad \lambda^\zeta = e^{\zeta \log \lambda}, \quad t^\zeta = t^{\zeta \log t}.$$

Die unvollständigen Gammafunktionen werden durch die Integrale:

$$P_\lambda(\zeta) = \int_0^{\lambda\zeta} e^{-t} t^{\zeta-1} dt, \quad \Re(\zeta) > 0,$$

$$Q_\lambda(\zeta) = \int_\lambda^\infty e^{-t} t^{\zeta-1} dt, \quad \zeta \text{ beliebig}$$

$\lambda \neq 0$

definiert. Der Integrationsweg von $Q_\lambda(\zeta)$ bleibe dabei von einer endlichen Stelle ab ganz im Winkelraum:

$$|\arg t| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

wo $\alpha > 0$ eine feste Konstante ist. Von den so erklärten Funktionen lässt sich $P_\lambda(\zeta)$ in die ganze ζ -Ebene als meromorphe Funktion fortsetzen; sie besitzt die gleichen Pole und Residuen wie $\Gamma(\zeta)$; dies lehren die Reihen:

$$P_\lambda(\zeta) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^l}{l!} \cdot \frac{\lambda^{\zeta+l}}{\zeta+l} = \frac{e^{-\lambda\zeta}}{\zeta} \sum_0^\infty \frac{\lambda^l}{(\zeta+1)(\zeta+2)\dots(\zeta+l)},$$

$Q_\lambda(\zeta)$ hingegen ist ganz transzendent. In λ lassen sich beide Funktionen nur als vieldeutige fortsetzen ⁴⁾.

Es besteht die wichtige Identität:

$$P_\lambda(\zeta) + Q_\lambda(\zeta) = \Gamma(\zeta),$$

wo die rechte Seite nicht mehr von λ abhängt. Die rechte Seite besitzt die bekannte asymptotische Formel:

$$\log \Gamma(\zeta) = \left(\zeta - \frac{1}{2}\right) \log \zeta - \zeta + \log \sqrt{2\pi} + \log(1 - \gamma(\zeta));$$

$$\log(1 - \gamma(\zeta)) = \sum_1^m \frac{(-1)^{l+1} B_{l+1}}{l(l+1)\zeta^l} + O(|\zeta|^{-m-1})$$

gleichmässig in ζ für

$$|\arg \zeta| \leq \pi - \varepsilon; \quad |\zeta| \rightarrow \infty, \quad \varepsilon > 0.$$

Dabei bedeutet m eine natürliche Zahl; B_0, B_1, B_2, \dots sind die Bernoullischen Zahlen und $\log \zeta$ ist durch

$$|\Im(\log \zeta)| \leq \pi - \varepsilon$$

eindeutig gemacht, während $\log \sqrt{2\pi}$ reell zu nehmen ist. Speziell folgt aus der obigen

⁴⁾ Siehe: N. NIELSEN, *Handbuch der Gammafunktion* (Leipzig, Teubner, 1906), S. 25, 208.

Formel ⁵⁾:

$$\log(1 - \gamma(z)) = O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

In diesem Kapitel sollen auch die Glieder auf der linken Seite der obigen Identität asymptotisch bestimmt werden.

2. Wird erstens λ festgehalten und $|z|$ ins Unendliche wachsen gelassen, so gelangt man zu dem Paar:

$$P_\lambda(z) = -\lambda^z e^{-z} \left\{ \sum_0^{n-1} \frac{p_l^*(\lambda)}{(-z)^{l+1}} + O(|\Re(z)|^{-n-1}) \right\} \quad \Re(z) \rightarrow +\infty,$$

$$Q_\lambda(z) = +\lambda^z e^{-z} \left\{ \sum_0^{n-1} \frac{p_l^*(\lambda)}{(-z)^{l+1}} + O(|\Re(z)|^{-n-1}) \right\} \quad \Re(z) \rightarrow -\infty,$$

wobei $p_l^*(\lambda)$ ein Polynom l -ten Grades in λ ist, das durch die Reihe

$$e^{-\lambda(e^u-1)} = \sum_0^\infty p_l^*(\lambda) \frac{u^l}{l!}$$

bestimmt ist. Auf den Beweis sei verzichtet, da diese Formeln später nicht benutzt werden. Ein entsprechendes Formelpaar für die Funktionen

$$\mathfrak{B}_\lambda(z) = P_\lambda(\lambda z); \quad \mathfrak{D}_\lambda(z) = Q_\lambda(\lambda z), \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

werde statt dessen hergestellt, jedoch nur im Falle

$$|\arccos \lambda| < \frac{\pi}{2}.$$

3. Sei also $\alpha > 0$ eine beliebig kleine Zahl und λ auf den Winkelraum

$$|\arccos \lambda| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$$

beschränkt. Ebenso sei $\beta > 0$ eine beliebig kleine Zahl und

$$\Re\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}(1-z)\right) \begin{cases} \leq -\beta & \text{bei } \mathfrak{B}_\lambda(z), \\ \geq +\beta & \text{bei } \mathfrak{D}_\lambda(z). \end{cases}$$

In den Integralen für $\mathfrak{B}_\lambda(z)$ und $\mathfrak{D}_\lambda(z)$ kann alsdann

$$t = \lambda e^u$$

gesetzt werden, wo u reell ist; man erhält so:

$$\mathfrak{B}_\lambda(z) = \lambda^{\lambda z} e^{-z} \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda(1-z)u - \lambda\alpha(u)} du,$$

$$\mathfrak{D}_\lambda(z) = \lambda^{\lambda z} e^{-z} \int_0^\infty e^{-\lambda(1-z)u - \lambda\alpha(u)} du.$$

$$\alpha(u) = e^u - (1+u)$$

Diese Integrale werden im Gegensatz zu den ursprünglichen über die reelle Achse erstreckt.

⁵⁾ Siehe N. E. NÖRLUND, *Differenzenrechnung*, (Berlin, Springer, 1924), S. 111.

4. Unter $\varepsilon < \frac{1}{2}$ eine sehr kleine positive Konstante verstanden, setzen wir:

$$\mu = |\lambda|^{\varepsilon - \frac{1}{2}}$$

Wegen

$$\alpha(-\mu) \sim \frac{1}{2} |\lambda|^{2\varepsilon-1}; \quad \alpha'(-\mu) \sim -|\lambda|^{\varepsilon - \frac{1}{2}};$$

$$\alpha(+\mu) \sim \frac{1}{2} |\lambda|^{2\varepsilon-1}; \quad \alpha'(+\mu) \sim |\lambda|^{\varepsilon - \frac{1}{2}}$$

ist für hinreichend grosses $|\lambda|$:

$$\alpha(-\mu) \geq \frac{1}{4} |\lambda|^{2\varepsilon-1}; \quad \alpha'(-\mu) \leq -\frac{1}{2} |\lambda|^{\varepsilon - \frac{1}{2}};$$

$$\alpha(+\mu) \geq \frac{1}{4} |\lambda|^{2\varepsilon-1}; \quad \alpha'(+\mu) \geq \frac{1}{2} |\lambda|^{\varepsilon - \frac{1}{2}}.$$

Da $\alpha''(u) = e^u$ stets positiv bleibt, so ist für jedes reelle u ,

$$\alpha(u) \geq \alpha(u_0) + (u - u_0)\alpha'(u_0).$$

Speziell, wenn $u_0 = \mp \mu$, gelangt man zu den Formeln:

$$\alpha(u) \geq \frac{1}{4} |\lambda|^{2\varepsilon-1} - \frac{1}{2} |\lambda|^{\varepsilon - \frac{1}{2}} (u + \mu) \quad \text{für} \quad u \leq -\mu,$$

$$\alpha(u) \geq \frac{1}{4} |\lambda|^{2\varepsilon-1} + \frac{1}{2} |\lambda|^{\varepsilon - \frac{1}{2}} (u - \mu) \quad \text{für} \quad u \geq +\mu.$$

Also folgt für $|\lambda| \gg \infty$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{-\mu} e^{-\lambda(1-z)u - \lambda\alpha(u)} du \right| \leq \int_{-\infty}^{-\mu} e^{-\Re(\lambda)\alpha(u)} du \\ & \leq \int_{-\infty}^{-\mu} e^{\frac{\Re(\lambda)}{|\lambda|} \left\{ -\frac{|\lambda|^{2\varepsilon}}{4} + \frac{|\lambda|^{\varepsilon + \frac{1}{2}}}{2} (u + \mu) \right\}} du = O(e^{-|\lambda|^\varepsilon}) \quad \text{für} \quad \Re\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}(1-z)\right) \leq -\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mu}^{\infty} e^{-\lambda(1-z)u - \lambda\alpha(u)} du \right| \leq \int_{\mu}^{\infty} e^{-\Re(\lambda)\alpha(u)} du \\ & \leq \int_{\mu}^{\infty} e^{\frac{\Re(\lambda)}{|\lambda|} \left\{ -\frac{|\lambda|^{2\varepsilon}}{4} - \frac{|\lambda|^{\varepsilon + \frac{1}{2}}}{2} (u - \mu) \right\}} du = O(e^{-|\lambda|^\varepsilon}) \quad \text{für} \quad \Re\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}(1-z)\right) \geq +\beta, \end{aligned}$$

so dass beide Integrale schneller als jede Potenz von $\frac{1}{|\lambda|}$ gegen Null streben.

5. Die zweite Ableitung von $\log u$ ist für $u > 0$ stets negativ, also bei beliebigem

$u_0 > 0$:

$$\log u \leq \log u_0 + \frac{u - u_0}{u_0}.$$

Ist $u_0 = \mu$ so folgt insbesondere:

$$\log u \leq \log \mu + \frac{u - \mu}{\mu}.$$

Damit ergibt sich für $|\lambda| \gg \infty, l \geq 0$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{-\mu} e^{-\lambda(1-\zeta)u} u^l du \right| \leq \int_{\mu}^{\infty} e^{-\beta|\lambda|u} u^l du \\ & \leq \int_{\mu}^{\infty} e^{-\beta|\lambda|\mu + l \log \mu - \left\{ \beta|\lambda| - \frac{l}{\mu} \right\} (u-\mu)} du = O(e^{-|\lambda|^{1/2}}) \quad \text{für} \quad \Re \left(\frac{\lambda}{|\lambda|} (1-\zeta) \right) \leq -\beta, \\ & \left| \int_{\mu}^{\infty} e^{-\lambda(1-\zeta)u} u^l du \right| \leq \int_{\mu}^{\infty} e^{-\beta|\lambda|u} u^l du \\ & \leq \int_{\mu}^{\infty} e^{-\beta|\lambda|\mu + l \log \mu - \left\{ \beta|\lambda| - \frac{l}{\mu} \right\} (u-\mu)} du = O(e^{-|\lambda|^{1/2}}) \quad \text{für} \quad \Re \left(\frac{\lambda}{|\lambda|} (1-\zeta) \right) \geq +\beta, \end{aligned}$$

so dass auch diese Integrale schneller als jede Potenz von $\frac{1}{|\lambda|}$ gegen Null streben.

6. Ist schliesslich $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, so wird

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\mu}^0 e^{-\lambda(1-\zeta)u} u^n du \right| & \leq \int_{-\infty}^0 e^{-\beta|\lambda||u|} |u^n| du = O(|\lambda|^{-n-1}) \\ \left| \int_0^{\mu} e^{-\lambda(1-\zeta)u} u^n du \right| & \leq \int_0^{\infty} e^{-\beta|\lambda|u} u^n du = O(|\lambda|^{-n-1}) \end{aligned} \quad \text{für} \quad \Re \left(\frac{\lambda}{|\lambda|} (1-\zeta) \right) \begin{matrix} \leq -\beta, \\ \geq +\beta. \end{matrix}$$

7. Zu $e^{-\lambda\alpha(u)}$ gehört die Potenzreihe:

$$e^{-\lambda\alpha(u)} = \sum_0^{\infty} \frac{p_l(\lambda)}{l!} u^l,$$

in der offenbar $p_l(\lambda)$ ein Polynom in λ vom Grad $\left[\frac{l}{2} \right]$ ist:

- $p_0(\lambda) = 1$
- $p_1(\lambda) = 0$
- $p_2(\lambda) = -\lambda$
- $p_3(\lambda) = -\lambda$
- $p_4(\lambda) = -\lambda + 3\lambda^2$
- $p_5(\lambda) = -\lambda + 10\lambda^2$
- $p_6(\lambda) = -\lambda + 25\lambda^2 - 15\lambda^3$

usw. Neben diese unendliche Reihe tritt eine abbrechende mit dem Restglied als Integral:

$$e^{-\lambda \alpha(u)} = \sum_0^{n-1} \frac{p_l(\lambda)}{l!} u^l + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^u (v-t)^{n-1} \left(\frac{d}{dv}\right)^n e^{-\lambda \alpha(v)} dv.$$

Fortgesetztes Differenzieren ergibt:

$$\left(\frac{d}{dv}\right)^n e^{-\lambda \alpha(v)} = e^{-\lambda \alpha(v)} \sum_1^n (-\lambda)^k \varphi_{k,n}(v).$$

Dabei ist $\varphi_{k,n}(v)$ eine Funktion von v allein, z. B.:

$$\varphi_{1,1}(v) = \alpha'(v)$$

$$\varphi_{1,2}(v) = \alpha''(v), \quad \varphi_{2,2}(v) = \alpha'(v)^2$$

$$\varphi_{1,3}(v) = \alpha'''(v), \quad \varphi_{2,3}(v) = 3 \alpha'(v) \alpha''(v), \quad \varphi_{3,3}(v) = \alpha'(v)^3$$

Es gilt die Funktionalgleichung:

$$\varphi_{k,n}(v) = \varphi'_{k,n-1}(v) + \alpha'(v) \varphi_{k-1,n-1}(v).$$

Wegen

$$\alpha''(v) = \alpha'''(v) = \dots = e^v$$

lässt sich $\varphi_{k,n}(v)$ als ein Polynom in $\alpha'(v)$, $\alpha''(v)$ allein auffassen; dies Polynom hat endliche, konstante Koeffizienten.

Allgemein ist $\varphi_{k,n}(v)$ durch $\alpha'(v)^{2k-n}$ teilbar, d. h.:

$$\psi_{k,n}(v) = \varphi_{k,n}(v) : \alpha'(v)^{2k-n}$$

selbst ein Polynom in $\alpha'(v)$ und $\alpha''(v)$. Denn in den obigen Fällen sieht man dies sofort; allgemein aber lehrt die Funktionalgleichung die Richtigkeit durch Schluss von n auf $n-1$.

Die Veränderliche u , also auch v , liege jetzt im Intervall $(-\mu, +\mu)$. Dann ist gleichmässig in v :

$$\alpha(v) \geq 0,$$

$$\alpha(v) = O(1), \quad \alpha'(v) = O(\mu) = O(|\lambda|^{\frac{\epsilon-1}{2}}), \quad \alpha''(v) = O(1)$$

und folglich:

$$\varphi_{k,n}(v) = O(|\lambda|^{(2k-n)\left(\frac{\epsilon-1}{2}\right)}),$$

$$\left(\frac{d}{dv}\right)^n e^{-\lambda \alpha(v)} = \sum_1^n O(|\lambda|^{k+(2k-n)\left(\frac{\epsilon-1}{2}\right)}) = O(|\lambda|^{\left(\frac{\epsilon+1}{2}\right)^n}),$$

$$e^{-\lambda \alpha(u)} = \sum_0^{n-1} \frac{p_l(\lambda)}{l!} u^l + |u|^n O(|\lambda|^{\left(\frac{\epsilon+1}{2}\right)^n}).$$

8. Das Integral für $\mathfrak{P}_\lambda(z)$ zerlegen wir in

$$\mathfrak{P}_\lambda(z) = \lambda^{\lambda z} e^{-\lambda} \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda x(u) - \lambda(1-z)^n} du = \lambda^{\lambda z} e^{-\lambda} \left\{ \int_{-\infty}^{-\mu} + \int_{-\mu}^0 \right\}.$$

Nach den Ergebnissen von § 4-7 ist dann

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-\mu} &= O(|\lambda|^{-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)n-1}), \\ \int_{-\mu}^0 &= \sum_0^{n-1} \frac{p_l(\lambda)}{l!} \int_{-\mu}^0 e^{-\lambda(1-z)^n} u^l du + O(|\lambda|^{-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)n-1}), \\ \int_{-\mu}^0 e^{-\lambda(1-z)^n} u^l du &= \int_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^{-\mu} = -\frac{l!}{\lambda^{l+1}(1-z)^{l+1}} + O(|\lambda|^{-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)n-1}). \end{aligned}$$

Somit wird:

$$\mathfrak{P}_\lambda(z) = \frac{\lambda^{\lambda z} e^{-\lambda}}{\lambda(z-1)} \left\{ \sum_0^{n-1} \frac{p_l(\lambda)}{\lambda^l(1-z)^l} + O(|\lambda|^{-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)n-1}) \right\}.$$

Sei $n = 2m + 3$ eine ungerade Zahl und $\varepsilon = \frac{1}{2n}$. Die Summanden mit $l = 2m + 1$

und $l = 2m + 2$ sowie das Restglied haben die Grössenordnung $O(|\lambda|^{-m-1})$. Zusammen mit dem analogen Ergebnis für $\mathfrak{Q}_\lambda(z)$ ist also:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_\lambda(z) &= \frac{\lambda^{\lambda z} e^{-\lambda}}{\lambda(z-1)} \left\{ \sum_0^{2m} \frac{p_l(\lambda)}{\lambda^l(1-z)^l} + O(|\lambda|^{-m-1}) \right\} \\ \mathfrak{Q}_\lambda(z) &= \frac{\lambda^{\lambda z} e^{-\lambda}}{\lambda(1-z)} \left\{ \sum_0^{2m} \frac{p_l(\lambda)}{\lambda^l(1-z)^l} + O(|\lambda|^{-m-1}) \right\} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\leq -\beta, \\ &\geq +\beta, \end{aligned}$$

für $|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha; \Re\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}(1-z)\right)$

In dem Rest der λ -Ebene gelten wahrscheinlich Formeln anderer Bauart.

Speziell für $m = 0$ erhält man die Annäherungen ⁶⁾:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_\lambda(z) &= \frac{\lambda^{\lambda z} e^{-\lambda}}{\lambda(z-1)} (1 - p_\lambda(z)); & p_\lambda(z) &= O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right); \\ \mathfrak{Q}_\lambda(z) &= \frac{\lambda^{\lambda z} e^{-\lambda}}{\lambda(1-z)} (1 - q_\lambda(z)); & q_\lambda(z) &= O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \end{aligned}$$

⁶⁾ Die benutzte Methode ist nahe verwandt mit der, durch die P. DEBYE asymptotische Formeln für die BESSELSchen Funktionen erhalten hat. Siehe hierzu:

P. DEBYE, *Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen für grosse Werte des Arguments und unbeschränkt veränderliche Werte des Index* [Mathematische Annalen, Bd. 67 (1909), S. 535-558]; Eine bequeme Darstellung der Methode steht bei G. N. WATSON, *A treatise on the theory of BESSEL functions* (Cambridge, University press, 1922), S. 235.

9. Neben die Formeln (II_α) treten im Fall $\lambda > 0$ zwei andere, die in einem grösseren Teil der z -Ebene gelten:

Durch partielle Integration der Ausgangsintegrale für $\mathfrak{P}_\lambda(z)$, $\mathfrak{Q}_\lambda(z)$ in § 3 erhält man zunächst:

$$p_\lambda(z) = -\lambda \int_{-\infty}^0 \alpha'(u) e^{-\lambda(1-z)u - \lambda\alpha(u)} du \quad \Re(z) \geq 1,$$

$$q_\lambda(z) = +\lambda \int_0^{\infty} \alpha'(u) e^{-\lambda(1-z)u - \lambda\alpha(u)} du \quad \Re(z) \leq 1,$$

also bei wachsendem $\lambda > 0$ gleichmässig in z :

$$p_\lambda(z) = O(\lambda) \quad \text{für } \Re(z) \geq 1, \quad q_\lambda(z) = O(\lambda) \quad \text{für } \Re(z) \leq 1.$$

Genüge dagegen $z = x + yi$ den schärferen Ungleichungen:

$$|z| \leq R; \quad |y| \geq \varepsilon; \quad x \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 1 \quad \text{bei} \quad \begin{matrix} p_\lambda(z) \\ q_\lambda(z) \end{matrix}$$

mit zwei positiven und sehr kleinen Konstanten ε und $\frac{1}{R}$. Auf Grund der ersten Annahme erhält man dann z. B.:

$$|1 - p_\lambda(z)| \geq \Re\{1 - p_\lambda(z)\} = 1 + \lambda \int_{-\infty}^0 \alpha'(u) e^{-\lambda(1-x)u - \lambda\alpha(u)} \cos \lambda y u du;$$

$$- \lambda \left\{ \int_{-\infty}^{-\frac{3\pi}{2\lambda|y|}} + \int_{\frac{\pi}{2\lambda|y|}}^0 \right\} \alpha'(u) e^{-\lambda(1-x)u - \lambda\alpha(u)} \cos \lambda y u du \leq -\lambda \int_{-\infty}^0 \alpha'(u) e^{-\lambda\alpha(u)} du = 1.$$

Ferner ist für hinreichend grosses λ und $-\frac{3\pi}{2\lambda|y|} \leq u \leq -\frac{\pi}{2\lambda|y|}$

$$e^{-\lambda(1-x)u} \geq 1; \quad -\alpha'(u) = -\left(u + \frac{u^2}{2} + \dots\right) \geq \frac{\pi}{4\varepsilon\lambda};$$

$$\lambda \alpha(u) = \lambda \left(\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \dots\right) \leq \log 2$$

und somit:

$$+ \lambda \int_{-\frac{3\pi}{2\lambda|y|}}^{-\frac{\pi}{2\lambda|y|}} \alpha'(u) e^{-\lambda(1-x)u - \lambda\alpha(u)} \cos \lambda y u du \geq \frac{\pi}{8\varepsilon} \int_{-\frac{3\pi}{2\lambda|y|}}^{-\frac{\pi}{2\lambda|y|}} \cos \lambda y u du = \frac{\pi}{4\varepsilon\lambda|y|} \geq \frac{\pi}{4\varepsilon R \cdot \lambda},$$

d. h. wegen oben:

$$\log(1 - p_\lambda(z)) = O(\log \lambda),$$

Nach der ersten Formel (II_α) ist aber gleichmässig in z :

$$\log(1 - p_\lambda(z)) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{für } x \geq 1 + \varepsilon,$$

Somit, indem statt 2ε wieder ε gesetzt wird, mit der analog zu erhaltenden Formel für $q_\lambda(z)$, gilt:

$$(\text{II}_\beta) \quad \begin{cases} \log \mathfrak{F}_\lambda(z) = \lambda z \log \lambda - \lambda + O(\log \lambda) \\ \log \mathfrak{Q}_\lambda(z) = \lambda z \log \lambda - \lambda + O(\log \lambda) \end{cases} \quad \text{für } \begin{matrix} \Re(z) \geq 1 \\ \Re(z) \leq 1 \end{matrix} \quad \varepsilon \leq |1 - z| \leq R.$$

IO. Die sämtlichen asymptotischen Formeln dieses Kapitels dürfen nach z differenziert werden. Bei (II_α), (II_β) zeigt man dies am einfachsten von den differenzierten Ausgangsintegralen her, indem man das dargestellte Verfahren auf sie anwendet.

KAPITEL III.

DIE NULLSTELLEN VON $P_\lambda(z)$ UND $Q_\lambda(z)$ FÜR $R(\lambda) > 0$.

I. Durch die Gleichungen

$$P_\lambda(z) = 0, \quad Q_\lambda(z) = 0$$

werden zwei analytische Funktionen $z = z(\lambda)$ definiert, die sich sehr weitgehend untersuchen lassen, wenn von den Formeln des vorigen Kapitels Gebrauch gemacht wird. Damit dies möglich ist, sei

$$|\arccos \lambda| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$$

angenommen, mit einer beliebig kleinen Konstanten $\alpha > 0$.

SATZ I. — Wenn $\gamma > 0$ beliebig klein ist, so existiert eine endliche positive Zahl $\Lambda(\gamma)$, so dass

$$P_\lambda(z) \quad \text{in der Halbebene } \Re(z) \geq (1 + \gamma)\Re(\lambda),$$

$$Q_\lambda(z) \quad \text{in der Halbebene } \Re(z) \leq (1 - \gamma)\Re(\lambda)$$

keine Nullstellen hat, sobald $|\lambda| \geq \Lambda$ ist.

Der Beweis ergibt sich sofort aus den Formeln (II_α), die das Nichtverschwinden in Evidenz setzen.

Wahrscheinlich gilt der Satz nicht mehr, wenn λ im Winkelraum $\frac{\pi}{2} < |\operatorname{arc} \lambda| \leq \pi$ liegt.

2. Infolge des vorigen Hilfssatzes genügt es, die Nullstellen

$$\text{von } P_\lambda(z) \text{ in der Halbebene } \Re(z) \leq (1 + \gamma)\Re(\lambda),$$

$$\text{von } Q_\lambda(z) \text{ in der Halbebene } \Re(z) \geq (1 - \gamma)\Re(\lambda)$$

zu bestimmen. Wir lassen den Streifen $|\Re(z - \lambda)| \leq \gamma|\Re(\lambda)|$ ausseracht und gehen zur Veränderlichen λz statt z über, so dass es sich, wegen der Grundidentität

$$\mathfrak{P}_\lambda(z) + \mathfrak{Q}_\lambda(z) = \Gamma(\lambda z),$$

jetzt um die Bestimmung der Wurzeln

$$\text{von } \mathfrak{P}_\lambda(z) \equiv \Gamma(\lambda z) - \mathfrak{Q}_\lambda(z) = 0 \text{ in der Halbebene } \Re\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}(1 - z)\right) \geq +\beta,$$

$$\text{von } \mathfrak{Q}_\lambda(z) \equiv \Gamma(\lambda z) - \mathfrak{P}_\lambda(z) = 0 \text{ in der Halbebene } \Re\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}(1 - z)\right) \leq -\beta$$

handelt.

3. Um die STIRLINGSche Formel direkt anwenden zu können, sei z beschränkt durch die Bedingungen:

$$\Re\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}(1 - z)\right) \geq +\beta, \quad |z| \geq \varepsilon, \quad |\operatorname{arc} \lambda z| \leq \pi - \varepsilon \text{ bei der Gleichung } \mathfrak{P}_\lambda(z) = 0,$$

$$\Re\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}(1 - z)\right) \leq -\beta \text{ bei der Gleichung } \mathfrak{Q}_\lambda(z) = 0,$$

wo ε eine positive Konstante ist. Im ersten Fall hat man nach früher, bis auf ganze Vielfache von $2\pi i$:

$$\log \mathfrak{Q}_\lambda(z) = \lambda z \log \lambda - \lambda - \log \lambda - \log(1 - z) + \log(1 - q_\lambda(z)),$$

$$\log(1 - q_\lambda(z)) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right),$$

im zweiten Fall:

$$\log \mathfrak{P}_\lambda(z) = \lambda z \log \lambda - \lambda - \log \lambda - \log(z - 1) + \log(1 - p_\lambda(z)),$$

$$\log(1 - p_\lambda(z)) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right),$$

und in beiden Fällen:

$$\log \Gamma(\lambda z) = \lambda z \log \lambda z - \lambda z - \frac{1}{2} \log \lambda z + \log \sqrt{2\pi} + \log(1 - \gamma(\lambda z));$$

$$\log(1 - \gamma(\lambda z)) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right).$$

Überall ist dabei der Hauptwert der Logarithmen zu nehmen.

Also erhält man folgende Gleichungen für die Nullstellen von $\mathfrak{P}_\lambda(z)$ und $\mathfrak{Q}_\lambda(z)$:

1) Für die Nullstellen von $\mathfrak{F}_\lambda(z)$:

$$z \log z + 1 - z = \frac{2k\pi i}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \log \frac{(\lambda z)}{2\pi\lambda^2(1-z)^2} + \frac{1}{\lambda} \log \frac{1 - q_\lambda(z)}{1 - \gamma(\lambda z)},$$

$$\frac{1}{\lambda} \log \frac{1 - q_\lambda(z)}{1 - \gamma(\lambda z)} = O(|\lambda|^{-2});$$

2) für die Nullstellen von $\mathfrak{D}_\lambda(z)$:

$$z \log z + 1 - z = \frac{2k\pi i}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \log \frac{(\lambda z)}{2\pi\lambda^2(z-1)^2} + \frac{1}{\lambda} \log \frac{1 - p_\lambda(z)}{1 - \gamma(\lambda z)},$$

$$\frac{1}{\lambda} \log \frac{1 - p_\lambda(z)}{1 - \gamma(\lambda z)} = O(|\lambda|^{-2}).$$

Dabei ist k eine beliebige ganze rationale Zahl und die Logarithmen

$$\frac{1}{2} \log \lambda z, \quad \frac{1}{2} \log 2\pi, \quad \frac{1}{2} \log \lambda^2, \quad \frac{1}{2} \log (1-z)^2, \quad \frac{1}{2} \log (z-1)^2$$

sind alle als Hauptwerte zu nehmen.

Mit den Abkürzungen

$$f(z) = z \log z + 1 - z,$$

$$\omega = \frac{2k\pi i}{\lambda},$$

$$f_\lambda(z, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda} \log \frac{(\lambda z)}{2\pi\lambda^2(1-z)^2} + \frac{1}{\lambda} \log \frac{1 - q_\lambda(z)}{1 - \gamma(\lambda z)} & \text{im Fall 1),} \\ \frac{1}{2\lambda} \log \frac{(\lambda z)}{2\pi\lambda^2(z-1)^2} + \frac{1}{\lambda} \log \frac{1 - p_\lambda(z)}{1 - \gamma(\lambda z)} & \text{im Fall 2)} \end{cases}$$

gehen die beiden obigen Gleichungen in die Form

$$f(z) = \omega + f_\lambda(z, \omega)$$

über, die im ersten Kapitel betrachtet wurde und jetzt in unserm Spezialfall untersucht werden soll.

4. Mit \mathfrak{G}_λ sei der Teil der RIEMANNschen Fläche von $\log z$ bezeichnet, der durch die Ungleichungen:

$$-\frac{3}{2}\pi \leq \arg z = \Im(\log z) \leq +\frac{3}{2}\pi$$

festgelegt ist. Offenbar besteht \mathfrak{G}_λ aus einem vollen Blatt $\mathfrak{G}_\lambda^{(1)}$ der z -Ebene und aus der linken Hälfte $\mathfrak{G}_\lambda^{(2)}$ einer solchen z -Ebene bis zur imaginären Achse \mathfrak{M}_λ . Beide Blätter hängen in einem Verzweigungsschnitt längs der negativ reellen Achse zusammen. Durch die Funktion

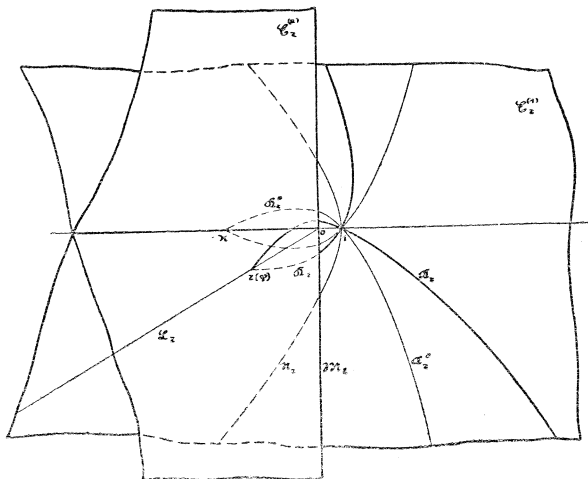
$$w = f(z) = z \log z + 1 - z$$

mit der Umkehrfunktion

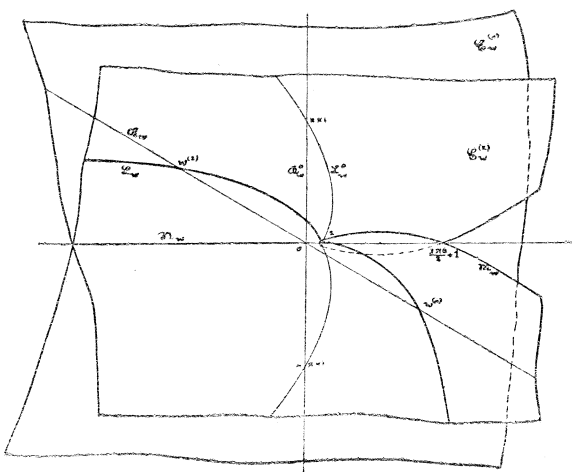
$$z = g(w)$$

wird \mathfrak{G}_ζ eindeutig auf ein RIEMANNSCHEES Flächenstück \mathfrak{G}_w abgebildet, das aus zwei Blättern $\mathfrak{G}_w^{(1)}$ und $\mathfrak{G}_w^{(2)}$ besteht, die in einem Verzweigungsschnitt längs der negativ reellen Achse \mathfrak{N}_w zusammenhängen. $\mathfrak{G}_w^{(1)}$ besteht aus einer ganzen Ebene; $\mathfrak{G}_w^{(2)}$ hingegen ist nach der Richtung positiv reeller w -Werte hin von einer Kurve \mathfrak{M}_w , dem Bild von \mathfrak{M}_ζ , derart begrenzt, dass auf der Strecke $\left(1, \frac{3\pi\ell}{2} + 1\right)$ $\mathfrak{G}_w^{(2)}$ in einem linsenförmigen Bereich über sich selbst greift. Dem Schnitt \mathfrak{N}_w entspricht in \mathfrak{G}_ζ eine parabelähnliche Kurve \mathfrak{N}_ζ auf $\mathfrak{G}_\zeta^{(1)}$.

Durch die Abbildung $w = f(\zeta)$ geht der Punkt $\zeta = 1$ über in den Punkt $w = 0$, der Punkt $\zeta = 0$ in den Punkt $w = 1$. In diesen Punkten allein ist die Abbildung nicht konform.



FLÄCHE \mathfrak{G}_ζ



FLÄCHE \mathfrak{G}_w

5. Sei φ eine feste Zahl im Intervall

$$-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \leq \varphi \leq +\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Die Gleichung

$$r \cdot \log r - r = \cos \varphi$$

hat dann genau eine positive Wurzel. Man erhält z. B.:

$\varphi = 0^\circ$	$\cos \varphi = 1,000$	$r = 3,591$
10°	$0,985$	$3,579$
20°	$0,940$	$3,543$
30°	$0,866$	$3,485$
40°	$0,766$	$3,404$
45°	$0,707$	$3,355$
50°	$0,653$	$3,324$
60°	$0,500$	$3,181$
70°	$0,342$	$3,058$
80°	$0,173$	$2,886$
90°	$0,000$	$2,718$

Die so definierte Wurzel sei mit $r_\alpha(\varphi)$ bezeichnet.

Den Geradenstücken $\mathfrak{L}_\alpha(\varphi)$ auf \mathfrak{G}_α : $\text{arc } \alpha = \mp \pi - \varphi$ entspricht auf \mathfrak{G}_w eine Kurve $\mathfrak{L}_w(\varphi)$ mit der Parametergleichung

$$w - 1 = r e^{-\varphi i} \left(-\log \frac{r}{e} + (\varphi \pm \pi) i \right) \quad r \geq 0.$$

$\mathfrak{L}_w(\varphi)$ besitzt also in $w = 1$ eine Spitze mit der Tangente

$$w - 1 = r e^{-\varphi i} \left(-\log \frac{r}{e} \right).$$

Die gerade Linie $\mathfrak{R}_w(\varphi)$:

$$w = r e^{-\varphi i} (\varphi \pm \pi) i$$

wird offenbar von $\mathfrak{L}_w(\varphi)$ in genau zwei Punkten geschnitten. Diese Schnittpunkte $\bar{w}(\varphi)$, $\underline{w}(\varphi)$ liegen beide auf dem Blatt $\mathfrak{G}_w^{(2)}$. Auf \mathfrak{G}_α besitzen sie die übereinanderliegenden Bildpunkte

$$\bar{\alpha}(\varphi) = \underline{\alpha}(\varphi) = r_\alpha(\varphi) e^{-\varphi i} \equiv \alpha(\varphi).$$

Offenbar ist

$$\bar{w}(\varphi) = -i(\varphi - \pi)z(\varphi), \quad \underline{w}(\varphi) = -i(\varphi + \pi)z(\varphi)$$

wobei $\bar{w}(\varphi)$ den Schnittpunkt oberhalb, $\underline{w}(\varphi)$ den unterhalb der Tangente

$$w - 1 = r e^{-\varphi i} \left(-\log \frac{r}{e} \right)$$

bezeichnet.

Sei $\mathfrak{R}_w^{(2)}(\varphi)$ der Teil von $\mathfrak{R}_w(\varphi)$ auf $\mathfrak{G}_w^{(2)}$ zwischen $\bar{w}(\varphi)$ und $\underline{w}(\varphi)$, $\mathfrak{R}_w^{(1)}(\varphi)$ die Projektion dieser Geraden auf $\mathfrak{G}_w^{(1)}$. Auf \mathfrak{G}_χ entsprechen ihnen die Bilder $\mathfrak{R}_\chi^{(2)}(\varphi)$ und $\mathfrak{R}_\chi^{(1)}(\varphi)$. Die beiden Kurven $\mathfrak{R}_\chi^{(1)}(\varphi)$ und $\mathfrak{R}_\chi^{(2)}(\varphi)$ hängen im Punkte $z = 1$ in einem Doppelpunkt zusammen; ihre Tangenten stehen hier senkrecht zueinander und bilden mit der reellen z -Achse Winkel der Grösse $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ und $-\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$. Die Kurve $\mathfrak{R}_\chi^{(1)}(\varphi)$ liegt ganz rechts von \mathfrak{N}_χ in $\mathfrak{G}_\chi^{(1)}$. Sie ähnelt einer Neilschen Parabel; ihre weit-entfernten Punkte sind asymptotisch gleich

$$z \sim \frac{r}{\log r} \left(1 - \frac{\mp \pi - \varphi}{\log r} i \right) e^{(\mp \frac{\pi}{2} - \varphi)i}$$

Von ganz anderer Gestalt ist $\mathfrak{R}_\chi^{(2)}(\varphi)$. Diese Kurve besitzt in der Projektion eine geschlossene, linsenähnliche Gestalt; sie liegt links von \mathfrak{N}_χ auf $\mathfrak{G}_\chi^{(1)}$ bzw. auf $\mathfrak{G}_\chi^{(2)}$. Im Falle $\varphi \geq 0$ läuft der obere Bogen von $\mathfrak{R}_\chi^{(2)}(\varphi)$ auf $\mathfrak{G}_\chi^{(1)}$ zum Punkt $\underline{z}(\varphi)$, der untere über $\mathfrak{G}_\chi^{(1)}$ und $\mathfrak{G}_\chi^{(2)}$ zum Punkt $\bar{z}(\varphi)$. Von den beiden spitzen Winkeln, die $\mathfrak{R}_\chi^{(2)}(\varphi)$ in $z(\varphi)$ mit der Geraden \mathfrak{L}_χ bildet, ist der obere, grössere gleich

$$\arctg \left(\frac{\log r_o(\varphi)}{\pi - \varphi} \right),$$

der untere, kleinere gleich

$$\arctg \left(\frac{\log r_o(\varphi)}{\pi + \varphi} \right).$$

Ist $\varphi \leq 0$, so spiegelt sich alles an der reellen Achse.

6. SATZ 2. — Die beiden Kurven $\mathfrak{R}_\chi^{(1)}(\varphi)$ und $\mathfrak{R}_\chi^{(2)}(\varphi)$ haben mit der Geraden

$$\Re(e^{\varphi i}(1 - z)) = 0$$

nur den Punkt $z = 1$ gemein.

Offenbar werden alle Punkte dieser Geraden durch

$$z = \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} e^{(\psi - \varphi)i}, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi < +\frac{\pi}{2}$$

gegeben; dabei ist nach der früheren Definition von $\log z$

$$\log z = \log \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} + (\psi - \varphi)i.$$

Weiter ist nach Definition auf $\mathfrak{R}_\chi^{(1)}(\varphi)$ und $\mathfrak{R}_\chi^{(2)}(\varphi)$:

$$\Re(e^{zi} f(z)) = 0,$$

also nach einfacher Rechnung:

$$F(\varphi, \psi) \equiv \log \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} - (\psi - \varphi) \operatorname{tg} \psi = 0.$$

Sei φ festgehalten. Alsdann ist, dem Punkt $z = 1$ entsprechend

$$F(\varphi, \varphi) = 0.$$

Es gibt aber keinen andern Punkt ψ im Intervall $-\frac{\pi}{2} < \psi < +\frac{\pi}{2}$, in dem $F(\varphi, \psi)$ verschwindet, denn sonst wäre nach dem Rolleschen Satz in einem Punkt $\chi \neq \varphi$ dieses Intervalls

$$\frac{\partial}{\partial \chi} F(\varphi, \chi) \equiv \frac{\varphi - \chi}{\cos^2 \chi} = 0,$$

was unmöglich ist.

7. Sei $\mathfrak{F}_\chi^{(1)}(\varphi)$ der Bereich auf $\mathfrak{G}_\chi^{(1)}$:

$$\Re(e^{zi}(1 - z)) \leq -\beta, \quad |z| \leq R$$

und $\mathfrak{F}_\chi^{(2)}(\varphi)$ der Bereich auf $\mathfrak{G}_\chi^{(1)}$ und $\mathfrak{G}_\chi^{(2)}$:

$$\Re(e^{zi}(1 - z)) \geq +\beta, \quad \varepsilon \leq |z| \leq R, \quad |(\operatorname{arc} z) + \varphi| \leq \pi - \varepsilon,$$

wo ε, R wie früher definiert sind. Alsdann enthält nach dem vorigen Satz $\mathfrak{F}_\chi^{(1)}(\varphi)$ Punkte nur von $\mathfrak{R}_\chi^{(1)}(\varphi)$, $\mathfrak{F}_\chi^{(2)}(\varphi)$ nur von $\mathfrak{R}_\chi^{(2)}(\varphi)$. Beide Bereiche sind einfachzusammenhängend und ohne Verzweigungspunkte, ebenso die ihnen auf \mathfrak{G}_w entsprechenden Bilder $\mathfrak{F}_w^{(1)}(\varphi)$, $\mathfrak{F}_w^{(2)}(\varphi)$. Streben ε und $\frac{1}{R}$ gegen Null, so konvergiert der in ihnen enthaltene Teil der Kurven \mathfrak{R} gegen die ganzen Kurven. Mit $\mathfrak{F}_\chi^{(1)}(\varphi)$, $\mathfrak{F}_\chi^{(2)}(\varphi)$ seien jetzt irgend zwei Teilbereiche von $\mathfrak{R}_\chi^{(1)}(\varphi)$ und $\mathfrak{R}_\chi^{(2)}(\varphi)$ bezeichnet, mit $\mathfrak{F}_w^{(1)}(\varphi)$, $\mathfrak{F}_w^{(2)}(\varphi)$ ihre Bilder auf \mathfrak{G}_w . Auf die Gleichung

$$f(z) = \omega + f_\lambda(z, \omega),$$

zu der wir in § 3 gelangt sind, können wir die Ergebnisse des ersten Kapitels anwenden. Wenn $\omega = \frac{2k\pi i}{\lambda}$ in $\mathfrak{F}_w^{(1)}(\varphi)$ bzw. $\mathfrak{F}_w^{(2)}(\varphi)$, $\zeta = g(\omega)$ in $\mathfrak{F}_\chi^{(1)}(\varphi)$ bzw. $\mathfrak{F}_\chi^{(2)}(\varphi)$

liegt, wenn

$$\operatorname{arc} \lambda = \varphi$$

ist und $|\lambda|$ über alle Grenzen wächst, ergeben sich aus der Formel (I_r) für die Nullstellen von $\mathfrak{P}_\lambda(z)$ und $\mathfrak{D}_\lambda(z)$ die Werte:

1) Für die Nullstellen von $\mathfrak{P}_\lambda(z)$ in $\mathfrak{F}_\lambda^{(2)}(\varphi)$

$$(III_\alpha) \quad z = \zeta + \frac{1}{2\lambda \log \zeta} \log \frac{(\lambda \zeta)}{2\pi \lambda^2 (1 - \zeta)^2} + O\left(\frac{|\log \lambda|^2}{|\lambda|^2}\right).$$

2) Für die Nullstellen von $\mathfrak{D}_\lambda(z)$ in $\mathfrak{F}_\lambda^{(1)}(\varphi)$

$$(III_\alpha) \quad z = \zeta + \frac{1}{2\lambda \log \zeta} \log \frac{(\zeta)}{2\pi \lambda^2 (\zeta - 1)^2} + O\left(\frac{|\log \lambda|^2}{|\lambda|^2}\right).$$

Diese Formeln gelten gleichmäßig in $\zeta = g\left(\frac{2k\pi i}{\lambda}\right)$, solange ζ in den Bereichen $\mathfrak{F}_\lambda^{(2)}(\varphi)$ und $\mathfrak{F}_\lambda^{(1)}(\varphi)$ liegt. Sie gelten auch gleichmäßig in φ , da alle Abschätzungen hierin gleichmäßig sind. Auf die Deutung dieser Formeln wird später eingegangen.

8. Nach früher ist weiter

$$\log \frac{\mathfrak{P}_\lambda(z)}{\Gamma(\lambda z)} = -\lambda f(z) + O(|\log \lambda|) \quad \text{für } z \text{ im } \mathfrak{F}_\lambda^{(1)}(\varphi),$$

$$\log \frac{\mathfrak{D}_\lambda(z)}{\Gamma(\lambda z)} = -\lambda f(z) + O(|\log \lambda|) \quad \text{für } z \text{ im } \mathfrak{F}_\lambda^{(2)}(\varphi),$$

also für $\Re(e^{\varphi i} f(z)) \geq \varepsilon > 0$ gleichmäßig

$$(III_\beta) \quad \mathfrak{P}_\lambda(z) \sim \Gamma(\lambda z); \quad \mathfrak{D}_\lambda(z) \sim \Gamma(\lambda z), \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

wenn z in einem beschränkten Bereich liegt, der sich im ersten Fall ganz im Innern der geschlossenen Projektion von $\mathfrak{F}_\lambda^{(2)}(\varphi)$, im zweiten ganz rechts von $\mathfrak{F}_\lambda^{(1)}(\varphi)$ befindet.

9. Die letzten Ergebnisse lassen noch die etwaigen Nullstellen von $\mathfrak{P}_\lambda(z)$ in den beiden Punktmengen

$$|z| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad |z| \geq \varepsilon, \quad |\operatorname{arc} \lambda z| \geq \pi - \varepsilon$$

ausseracht; die Menge $|z| \leq \varepsilon$ sei hiervon zunächst betrachtet.

Sei erstens

$$|z| = \varepsilon, \quad |\operatorname{arc} \lambda z| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dann ist

$$\log \frac{\Gamma(\lambda z)}{\mathfrak{D}_\lambda(z)} = \lambda f(z) + O(|\log \lambda|),$$

also für hinreichend grosses $|\lambda|$:

$$\log \left| \frac{\Gamma(\lambda z)}{\mathfrak{D}_\lambda(z)} \right| \geq \frac{1}{2} \Re(\lambda) \geq \log 2.$$

Sei zweitens

$$|z| = \varepsilon \quad \frac{\pi}{2} \leq |\arg \lambda z| \leq \pi.$$

Dann ist nach der bekannten Formel

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

gleichmässig in z :

$$\log \Gamma(\lambda z) = -\log \sin \pi \lambda z + \lambda z \log(-\lambda z) - \lambda z + O(|\log \lambda|),$$

$$\log \mathfrak{D}_\lambda(z) = \lambda z \log \lambda - \lambda + O(|\log \lambda|),$$

$$\log \frac{\Gamma(\lambda z)}{\mathfrak{D}_\lambda(z)} = -\log \sin \pi \lambda z + \lambda(z \log(-z) + 1 - z) + O(|\log \lambda|).$$

Aus der Ungleichung

$$\Re(\log \sin \pi \lambda z) \leq \log \operatorname{Sin} \pi |\lambda \varepsilon| \leq \pi |\lambda| \varepsilon$$

ergibt sich daher für hinreichend grosse $|\lambda|$, falls nur ε genügend klein im Verhältnis zu α ist, die Existenz einer Konstanten $\delta > 0$, so dass

$$\log \left| \frac{\Gamma(\lambda z)}{\mathfrak{D}_\lambda(z)} \right| \geq \delta \Re(\lambda) \geq \log 2.$$

Die Funktion $\frac{\mathfrak{D}_\lambda(z)}{\Gamma(\lambda z)}$ ist im Kreis $|z| \leq \varepsilon$ regulär, nimmt also das Maximum des absoluten Betrages auf dem Rande an; daher ist

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{D}_\lambda(z)}{\Gamma(\lambda z)} &\leq \frac{1}{2}, \\ |\mathfrak{D}_\lambda(z)| &\leq \frac{1}{2} |\Gamma(\lambda z)|, \end{aligned} \quad \text{für } |z| \leq \varepsilon,$$

wenn $|\lambda|$ hinreichend gross wird; somit kann wegen des Nichtverschwindens der Gammafunktion auch

$$\mathfrak{F}_\lambda(z) = \Gamma(\lambda z) - \mathfrak{D}_\lambda(z)$$

in diesem Kreis nicht gleich Null werden.

10. Sei jetzt

$$|z| \geq \varepsilon; \quad \pi - \varepsilon \leq |\arg \lambda z| \leq \pi.$$

Wir setzen

$$-e^{+\varphi i} z = \delta = \varepsilon + \eta i.$$

Zufolge der Relation

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

ergibt sich für die Nullstellen von $\mathfrak{B}_\lambda(z)$ die Gleichung

$$\frac{\pi}{\sin \pi |\lambda| \delta} = -|\lambda| \delta \Gamma(|\lambda| \delta) \mathfrak{D}_2(-e^{-\varphi i} \delta)$$

und nach den asymptotischen Formeln

$$\frac{\pi}{\sin \pi |\lambda| \delta} = -\sqrt{\frac{2\pi e^{-\varphi i} \cdot \delta}{\lambda(1+e^{-\varphi i} \delta)^2}} e^{|\lambda| \delta \log(e^{-\varphi i} \delta) - \delta - e^{\varphi i} \delta} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right).$$

Für die Wurzel ist dabei der Hauptwert zu nehmen.

Im Punkte $\delta = r_0(\varphi)$ ist

$$\Re(\delta \log(e^{-\varphi i} \delta) - \delta - e^{\varphi i} \delta) = 0.$$

Wenn $\sigma > 0$ hinreichend klein und $\delta > 0$ beliebig klein ist, so gibt es eine kleine Zahl $\varepsilon > 0$, dass für

$$|\delta| \geq \varepsilon; \quad |\operatorname{arc} \delta| \leq \varepsilon; \quad x \leq r_0(\varphi) - \delta$$

gleichmässig

$$\Re(\delta \log(e^{-\varphi i} \delta) - \delta - e^{\varphi i} \delta) \leq -\sigma,$$

für

$$|\delta| \geq \varepsilon; \quad |\operatorname{arc} \delta| \leq \varepsilon; \quad x \geq r_0(\varphi) + \delta$$

aber gleichmässig

$$\Re(\delta \log(e^{-\varphi i} \delta) - \delta - e^{\varphi i} \delta) \geq +\sigma$$

ist. Im ersten Fall strebt in der obigen Gleichung für die Nullstellen von $\mathfrak{B}_\lambda(z)$ die rechte Seite mit wachsendem $|\lambda|$ stärker gegen Null als die linke, wenn nur ε genügend klein ist; also kann es keine Nullstellen mehr geben, wenn $|\lambda|$ genügend gross ist. Im zweiten Fall hingegen ist die rechte Seite von höherer Grössenordnung als $|\lambda|^2$; man kann daher

$$\delta = \frac{b}{|\lambda|} + \beta$$

setzen, wo b eine natürliche Zahl bedeutet und

$$|\beta| \leq |\lambda|^{-2}$$

ist. Alsdann bekommt man für $b = O(|\lambda|)$:

$$\sin \pi |\lambda| \delta = (-1)^b \pi |\lambda| \beta (1 + O(|\lambda|^{-4})),$$

$$-\sqrt{\frac{2\pi e^{-\varphi i} \delta}{\lambda(1+e^{-\varphi i} \delta)^2}} e^{|\lambda| \delta \log(e^{-\varphi i} \delta) - \delta - e^{\varphi i} \delta} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{2\pi e^{-\varphi i} b}{(|\lambda| + e^{-\varphi i} b)^2}} e^{b \log \frac{b}{2\lambda} - e^{\varphi i} b} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right)$$

und folglich

$$(III_r) \begin{cases} \mathfrak{B} = \frac{(-1)^{b+1}}{|\lambda|} \sqrt{\frac{(|\lambda| + e^{\varphi i} b)^2}{2\pi e^{-\varphi i} b}} e^{-b \log \frac{b}{e\lambda} + e^{\varphi i}} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right), \\ \mathfrak{z} = -\frac{1}{\lambda} \left\{ b + (-1)^b \sqrt{\frac{(|\lambda| + e^{\varphi i} b)^2}{2\pi e^{-\varphi i} b}} e^{-b \log \frac{b}{e\lambda} + e^{\varphi i}} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right) \right\}. \end{cases}$$

Dieser Formel kann man die elegante Gestalt

$$\mathfrak{z} = -\frac{b}{\lambda} - \frac{(-1)^b}{\lambda} \cdot \frac{1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)}{b! Q_\lambda(-b)}$$

geben; im Fall, dass λ reell ist, stammt sie von Herrn G. RASCH. Sie gilt auch noch mit anderem O -Glied bei festem λ und wachsendem b . Siehe: HILLE und RASCH: *Über die unvollständige Gammafunktion $P(\mathfrak{z}, \rho)$* , II. [Mathematische Zeitschrift (Unter Druck)].

II. Durch die letzten Formeln ist jetzt die Frage nach der Lage der Nullstellen von $\mathfrak{P}_\lambda(\mathfrak{z})$ und $\mathfrak{D}_\lambda(\mathfrak{z})$ im wesentlichen behandelt. Den asymptotischen Formeln für diese entnimmt man folgende Aussagen:

Die Nullstellen von $\mathfrak{P}_\lambda(\mathfrak{z})$ häufen sich überall dicht gegen die Kurve $\mathfrak{R}_\lambda^{(2)}(\varphi)$, wenn der absolute Betrag von λ bei festem φ ins Unendliche wächst, ferner gegen das Stück der Geraden $\mathfrak{L}_\lambda(\varphi)$ zwischen $-\infty$ und $\mathfrak{z} = e^{-\varphi i} \cdot r_0(\varphi)$.

Bei wachsendem $|\lambda|$ kommen je zwei Nullstellen von $\mathfrak{P}_\lambda(\mathfrak{z})$ aus dem Unendlichen und wandern zusammen längs $\mathfrak{L}_\lambda(\varphi)$ zum Punkte $e^{-\varphi i} r_0(\varphi)$ hin. Hier trennen sie sich, um einzeln längs des oberen, bzw. unteren Bogens von $\mathfrak{R}_\lambda^{(2)}(\varphi)$ auf $\mathfrak{z} = 1$ hinzulaufen.

Längs $\mathfrak{L}_\lambda(\varphi)$ liegen zwischen den Punkten \mathfrak{z}_1 und \mathfrak{z}_2 asymptotisch $\mp \lambda(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2)$ Nullstellen, längs $\mathfrak{R}_\lambda^{(2)}(\varphi)$ zwischen den Punkten \mathfrak{z}_1 und \mathfrak{z}_2 , die zugleich dem oberen Bogen oder dem unteren angehören, asymptotisch $\mp \lambda \frac{f(\mathfrak{z}_1) - f(\mathfrak{z}_2)}{2\pi i}$ für $|\lambda| \rightarrow \infty$.

In jedem Bereich ganz im Innern von $\mathfrak{R}_\lambda^{(2)}(\varphi)$ gilt gleichmässig

$$\mathfrak{P}_\lambda(\mathfrak{z}) \sim \Gamma(\lambda \mathfrak{z}) \quad \text{für } |\lambda| \rightarrow \infty,$$

nicht aber in einem grösseren Bereich.

Die Nullstellen von $\mathfrak{D}_\lambda(\mathfrak{z})$ häufen sich überall dicht gegen die Kurve $\mathfrak{R}_\lambda^{(1)}(\varphi)$, wenn der absolute Betrag von λ bei festem φ ins Unendliche wächst.

Bei wachsendem $|\lambda|$ kommen die Nullstellen aus dem Unendlichen her und wandern längs $\mathfrak{R}_\lambda^{(1)}(\varphi)$ auf $\mathfrak{z} = 1$ hin.

Längs dieser Kurve liegen zwischen den Punkten \mathfrak{z}_1 und \mathfrak{z}_2 , die zugleich dem oberen oder dem unteren Zweig angehören, asymptotisch $\mp \lambda \frac{f(\mathfrak{z}_1) - f(\mathfrak{z}_2)}{2\pi i}$ Nullstellen.

In jedem endlichen Bereich ganz rechts von $\mathfrak{R}_\lambda^{(1)}(\varphi)$ gilt gleichmässig

$$\mathfrak{D}_\lambda(z) = \Gamma(\lambda z) \quad \text{für } |\lambda| \gg \infty,$$

nicht aber in einem grösserem Bereich.

Ausser den angegebenen Häufungsstellen der Nullstellen von $\mathfrak{P}_\lambda(z)$ und $\mathfrak{D}_\lambda(z)$ können etwaige Häufungspunkte allein noch auf der Geraden

$$\Re(e^{\varphi i}(1 - z)) = 0$$

liegen.

12. Sehr merkwürdig sind noch die Ergebnisse, die aus der Annahme folgen, dass $\lambda = |\lambda|e^{\varphi i}$ den Halbkreis

$$|\lambda| = \text{const.}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2}$$

beschreibt. Dann gilt:

Die Nullstellen von $\mathfrak{P}_\lambda(z)$ kommen jedem endlichen Punkt z beliebig nahe, der links von einer Kurve liegt, die aus der imaginären Achse zwischen $-\infty i$ und $-ei$, bzw. $+ei$ und $+\infty i$, sowie dem endlichen Bogen von \mathfrak{R}_λ zwischen $-ei$ und $+ei$ besteht, wenn $|\lambda|$ genügend gross ist.

Die Nullstellen von $\mathfrak{D}_\lambda(z)$ kommen jedem endlichen Punkt z rechts der Kurve \mathfrak{R}_λ beliebig nahe, wenn $|\lambda|$ genügend gross ist.

13. Zu den bisherigen Ergebnissen kann noch bemerkt werden, dass es vermöge der Formeln ($I_{\alpha, \beta}$) des ersten Kapitels ohne weiteres möglich ist, konvergente wie auch asymptotische unendliche Reihen für die Nullstellen von $\mathfrak{P}_\lambda(z)$ und $\mathfrak{D}_\lambda(z)$ anzugeben; diese Reihen sind jedoch sehr umständlich.

14. Nimmt man λ positiv reell an, so lassen sich einige weiteren Ergebnisse herleiten.

$Q_\lambda(z)$ besitzt keine reellen Nullstellen, denn für reelles λ ist $Q_\lambda(z)$ immer positiv. $P_\lambda(z)$ dagegen besitzt reelle Nullstellen nur in den Intervallen

$$-2h - 2 \leq z \leq -2h - 1, \quad (h = 0, 1, \dots);$$

für $z > 0$ nämlich ist $P_\lambda(z)$ selbst positiv und für

$$-2h - 1 \leq z \leq -2h \quad (h = 0, 1, \dots)$$

hat man ⁷⁾

$$\Gamma(z) < 0, \quad Q_\lambda(z) > 0; \quad P_\lambda(z) = \Gamma(z) - Q_\lambda(z) < 0.$$

⁷⁾ Siehe: N. NIELSEN: *Handbuch*, I. c. 4), S. 32-34, 211.

SATZ 3. — In der Halbebene $\Re(\zeta) \geq \lambda$ besitzt $P_\lambda(\zeta)$, in der Halbebene $\Re(\zeta) \leq \lambda$ besitzt $Q_\lambda(\zeta)$ keine Nullstellen ⁸⁾.

Denn es ist

$$\alpha(u) \geq 0 \quad \text{und} \quad \alpha(u), \quad \alpha'(u) \quad \text{monoton wachsend für} \quad 0 \leq u < +\infty,$$

$$\alpha(u) \geq 0 \quad \text{und} \quad -\alpha(u), \quad \alpha'(u) \quad \text{monoton wachsend für} \quad 0 \geq u > -\infty.$$

Ein Blick auf die Integrale für $p_\lambda(\zeta)$ und $q_\lambda(\zeta)$, $\mathfrak{P}_\lambda(\zeta)$ und $\mathfrak{Q}_\lambda(\zeta)$ ergibt:

$$p_\lambda(1) = 1, \quad \mathfrak{P}_\lambda(1) \neq 0,$$

$$q_\lambda(1) = 1, \quad \mathfrak{Q}_\lambda(1) \neq 0.$$

Ferner entnimmt man ihnen die Ungleichungen ($\zeta = x + yi$):

$$|p_\lambda(\zeta)| < p_\lambda(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \geq 1, \quad p_\lambda(x_1) < p_\lambda(x_2) \quad \text{für} \quad x_1 > x_2 \geq 1,$$

$$|q_\lambda(\zeta)| < q_\lambda(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \leq 1, \quad q_\lambda(x_1) > q_\lambda(x_2) \quad \text{für} \quad 1 \geq x_1 > x_2.$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} |p_\lambda(\zeta)| < 1 \quad \text{für} \quad x \geq 1, \\ |q_\lambda(\zeta)| < 1 \quad \text{für} \quad x \leq 1 \end{aligned} \quad \zeta \neq 1$$

und also auch

$$P_\lambda(\lambda\zeta) = \mathfrak{P}_\lambda(\zeta) \neq 0 \quad \text{für} \quad x \geq 1$$

$$Q_\lambda(\lambda\zeta) = \mathfrak{Q}_\lambda(\zeta) \neq 0 \quad \text{für} \quad x \leq 1.$$

15. Da jetzt $\lambda > 0$ ist, so werden die Nullstellen von $\mathfrak{P}_\lambda(\zeta)$, welche durch (Π_λ) dargestellt sind, alle reell. Denn ζ genügt einer Gleichung der Form

$$\beta = F(\beta), \quad \beta = -\left(\frac{b}{\lambda} + \zeta\right),$$

wo, wenn $\frac{1}{\lambda}$ genügend klein, für $|\beta| \leq \lambda^{-2}$ $|F'(\beta)|$ beliebig klein, also kleiner als 1 ist, und wo $F(\beta)$ für reellen β reelle Werte annimmt. Der erste Satz des ersten Kapitels ergibt also die Behauptung. Weiter folgt noch, dass durch die Kurven $\mathfrak{R}_\lambda^{(2)}(o)$ und $\mathfrak{Q}_\lambda(o)$ für $\mathfrak{P}_\lambda(\zeta)$, durch die Kurve $\mathfrak{R}_\lambda^{(1)}(o)$ für $\mathfrak{Q}_\lambda(\zeta)$ alle Häufungspunkte erschöpft

⁸⁾ Für den Fall der Funktion $Q_\lambda(\zeta)$ rührt dieser Satz im Spezialfall $\lambda = 1$ von LINDHAGEN her, allgemein von NIELSEN; siehe:

A. LINDHAGEN, *Studier öfner Gammafunktioner* [Dissertation, Stockholm (1887)].

N. NIELSEN, *Handbuch*, I. c. 4), S. 212.

sind. Denn nach den Formeln (II_p) ist gleichmässig:

$$\log \frac{\mathfrak{B}_\lambda(\zeta)}{\Gamma(\lambda\zeta)} = -\lambda f(\zeta) + O(\log \lambda), \quad x \geq 1, \quad \varepsilon \leq |\zeta - 1| \leq R, \quad |\zeta| \geq \varepsilon, \quad |\operatorname{arc} \zeta| \leq \pi - \varepsilon,$$

für

$$\log \frac{\mathfrak{D}_\lambda(\zeta)}{\Gamma(\lambda\zeta)} = -\lambda f(\zeta) + O(\log \lambda), \quad x \leq 1, \quad \varepsilon \leq |\zeta - 1| \leq R.$$

Da die Funktion $f(\zeta)$ auf der Geraden $x = 1$ nur im Punkt $\zeta = 1$ verschwindet, so können hier weitere, von $\zeta = 1$ verschiedene Häufungspunkte nicht liegen.

In unserem Sonderfall $\lambda > 0$ sind die beiden Kurven $\mathfrak{R}_\lambda^{(1)}(\varphi)$ und $\mathfrak{R}_\lambda^{(2)}(\varphi)$ symmetrisch zur reellen Achse. Die Zahl $r_0(0)$ hat den Näherungswert $r_0(0) = 3,591121459\dots$ Die imaginäre Achse wird von $\mathfrak{R}_\lambda^{(1)}(\varphi)$ nicht, von $\mathfrak{R}_\lambda^{(2)}(\varphi)$ in $\zeta = \mp \frac{2i}{\pi}$ geschnitten.

Den letzteren Punkten entsprechen die Nullstellen

$$\mp \zeta = \frac{2i}{\pi} \lambda + \frac{\delta \lambda}{\log \frac{2}{\pi} + \frac{\pi i}{2}} + \frac{1}{2}$$

$$+ \frac{1}{2 \left(\log \frac{2}{\pi} + \frac{\pi i}{2} \right)} \log \frac{1}{2\pi\lambda \left(\frac{2i}{\pi} - 1 \right)^2} + O\left(\frac{(\log \lambda)^2}{\lambda} \right)$$

mit $k = 1, 2, \dots$,

$$\delta = \frac{2k\pi i}{\lambda} - \frac{2i}{\pi} \log \frac{2}{e^\pi} = O\left(\frac{1}{\lambda} \right),$$

von $P_\lambda(\zeta)$ mit beschränktem Realteil, eine Formel, die auch Herr G. RASCH vor kurzem gefunden hat.

KAPITEL IV.

DIE NICHTREELLEN NULLSTELLEN VON $P_\lambda(\zeta)$ FÜR $\lambda > 0$.

1. Die Nullstellen von $P_\lambda(\zeta)$ genügen der Gleichung

$$f_\lambda(\zeta) \equiv \frac{\lambda^{-1} P_\lambda(\zeta)}{\Gamma(\zeta)} = 0.$$

$f_\lambda(\zeta)$ ist eine ganze transzendente Funktion der beiden Argumente; hat λ den endlichen

Wert $\lambda = \lambda_0$, so ist offenbar $f_{\lambda_0}(\zeta)$ nicht von ζ unabhängig. Wenn also ζ_0 eine Nullstelle von $P_\lambda(\zeta)$ bedeutet, so existiert eine natürliche Zahl l , dass

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^l f_{\lambda_0}(\zeta)|_{\zeta=\zeta_0} \neq 0$$

ist. Also ist nach Kap. I, Satz 2 für eine genügend kleine Umgebung von λ_0 auch $\zeta = \zeta(\lambda)$ beliebig nahe bei $\zeta_0 = \zeta(\lambda_0)$.

Konvergiere jetzt λ auf einem beschränkten Weg gegen den Wert λ_0 ; das Maximum von $|\lambda|$ auf diesem Weg sei Λ . Die Gleichung für $\zeta = \zeta(\lambda)$

$$\frac{1}{\zeta} - \frac{\lambda}{1!(\zeta+1)} + \frac{\lambda^2}{2!(\zeta+2)} - + \dots = 0.$$

zeigt, dass eine der Zahlen

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

die Ungleichung

$$|\zeta(\lambda) + n| \leq \frac{1}{4}$$

befriedigt, wenn

$$|\zeta(\lambda)| \geq M(\Lambda)$$

ist. Also kann ζ nicht ins Unendliche wachsen, denn wegen der Stetigkeit kann diese Nullstelle denjenigen der vorigen Bereiche, in welchem sie liegt, nicht verlassen, da alle diese Bereiche von einander getrennt sind.

2. Nach der Formel

$$P_\lambda(\zeta) = \frac{\lambda^\zeta e^{-\lambda}}{\zeta} \sum_0^\infty \frac{\lambda^n}{(\zeta+1)(\zeta+2) \dots (\zeta+n)}$$

hat $P_\lambda(\zeta)$ in dem Teil der Ebene

$$|\zeta + n| \geq 3\lambda > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

gewiss keine Nullstelle, denn hier ist

$$\left| \sum_0^\infty \frac{\lambda^n}{(\zeta+1) \dots (\zeta+n)} - 1 \right| \leq \sum_1^\infty \left(\frac{\lambda}{3\lambda}\right)^n = \frac{1}{2}.$$

Sei jetzt

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{9}.$$

Dann existiert eine natürliche Zahl m , so dass für $P_\lambda(\zeta) = 0$:

$$|\zeta + m| \leq 3\lambda \leq \frac{1}{3}, \text{ aber } |\zeta + n| \geq \frac{2}{3} \geq 6\lambda \text{ für } \begin{matrix} n = 1, 2, 3, \dots \\ n \neq m. \end{matrix}$$

Die Zahl

$$\delta = \varepsilon + m, \quad |\delta| \leq 3\lambda \leq \frac{1}{3}$$

genügt der Gleichung

$$\delta = F_{\lambda, m}(\delta);$$

$$F_{\lambda, m}(\delta) = \frac{\lambda^m}{(\delta-1)(\delta-2) \dots (\delta-m+1)} \frac{\sum_0^{\infty} \frac{\lambda^n}{(\delta+1)(\delta+2) \dots (\delta+n)}}{\sum_0^{m-1} \frac{\lambda^n}{(\delta-m+1)(\delta-m+2) \dots (\delta-m+n)}}.$$

Zufolge unserer Annahmen ist

$$\left| \sum_1^{\infty} \frac{\lambda^n}{(\delta+1) \dots (\delta+n)} \right| \leq \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^n = \frac{1}{5};$$

$$\left| \sum_1^{m-1} \frac{\lambda^n}{(\delta-m+1) \dots (\delta-m+n)} \right| \leq \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^n = \frac{1}{5};$$

$$\left| \frac{\lambda^m}{(\delta-1) \dots (\delta-m+1)} \right| \leq \frac{\lambda^m}{(6\lambda)^{m-1}} \leq \frac{2}{3} \cdot 6^{-m}; \quad \left| \sum_1^n \frac{1}{\delta+l} \right| \leq \sum_1^n \frac{1}{2/3} = \frac{3n}{2};$$

$$\left| \sum_1^{\infty} \frac{\lambda^n}{(\delta+1) \dots (\delta+n)} \sum_1^n \frac{1}{\delta+l} \right| \leq \frac{3}{2} \sum_1^{\infty} \frac{n}{6^n} = \frac{9}{25};$$

$$\left| \sum_1^{m-1} \frac{\lambda^n}{(\delta-m+1) \dots (\delta-m+n)} \sum_1^n \frac{1}{\delta+l} \right| \leq \frac{3}{2} \sum_1^{\infty} \frac{n}{6^n} = \frac{9}{25}.$$

Die Ableitung von $F_{\lambda, m}(\delta)$ nach δ :

$$F'_{\lambda, m}(\delta) = F_{\lambda, m}(\delta) \left\{ - \sum_1^{m-1} \frac{1}{\delta-n} + \frac{\sum_1^{\infty} \frac{\lambda^n}{(\delta+1) \dots (\delta+n)} \sum_1^n \frac{1}{\delta+l} - \frac{\sum_1^{m-1} \frac{\lambda^n}{(\delta-m+1) \dots (\delta-m+n)} \sum_1^n \frac{1}{\delta-m+l}}{\sum_0^{\infty} \frac{\lambda^n}{(\delta+1) \dots (\delta+n)}} - \frac{\sum_0^{m-1} \frac{\lambda^n}{(\delta-m+1) \dots (\delta-m+n)}}{\sum_0^{\infty} \frac{\lambda^n}{(\delta+1) \dots (\delta+n)}} \right\}$$

gestattet also die Abschätzung

$$\begin{aligned} |F'_{\lambda, m}(\delta)| &\leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^m \frac{1 + 1/5}{1 - 1/5} \left\{ \frac{3}{2} (m-1) + \frac{9/25}{1 - 1/5} + \frac{9/25}{1 - 1/5} \right\} \\ &\leq 6^{-m} \left\{ \frac{3}{2} (m-1) + \frac{9}{10} \right\} < 1. \end{aligned}$$

Für reelles δ ist $F_{\lambda, m}(\delta)$ reell; die Voraussetzung des ersten Satzes des ersten Kapitels

ist also erfüllt, so dass ζ einen reellen Wert hat und eine einfache Wurzel darstellt. Nach einer früheren Bemerkung über die reellen Nullstellen von $P_\lambda(\zeta)$ besitzt daher diese Funktion in jedem Intervall I_k :

$$I_k: \quad -2k - 2 \leq \zeta \leq -2k - 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

höchstens zwei einfache oder zusammenfallende Nullstellen.

Ist λ sehr klein, so gibt es aber auch wirklich je zwei Nullstellen in diesen Intervallen. Denn für

$$0 < \lambda \leq \frac{1}{9} \quad \text{und} \quad \zeta \leq -1, \quad u \geq 0$$

ist

$$\alpha'(u) < e^u \leq e^{-\zeta u}; \quad \alpha(u) \geq \frac{u^2}{2};$$

$$e^{\frac{\lambda}{2}} \leq \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{18}} = \frac{18}{17}; \quad e^{-\lambda} \geq \left(\frac{17}{18}\right)^2 > \frac{7}{8};$$

$$q_\lambda\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right) = \lambda \int_0^\infty \alpha'(u) e^{-(\lambda-\zeta)u - \lambda\alpha(u)} du$$

$$\leq \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda(u + \frac{u^2}{2})} du \leq \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda \frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi \lambda}{2}} \leq \sqrt{\frac{\pi}{18}} < \frac{1}{2};$$

$$Q_\lambda(\zeta) = \frac{\lambda^\zeta e^{-\lambda}}{\lambda - \zeta} \left(1 - q_\lambda\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)\right) > \frac{7}{8} \frac{1/2}{1 + 1/9} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^\zeta > \pi.$$

Da für $\zeta \leq -1$ auch

$$\Gamma(1 - \zeta) \geq 1$$

ist, hat man dann immer

$$Q_\lambda(\zeta) \Gamma(1 - \zeta) > \pi.$$

Nun genügen die Nullstellen von $P_\lambda(\zeta)$ der Gleichung

$$Q_\lambda(\zeta) \Gamma(1 - \zeta) = \frac{\pi}{\sin \pi \zeta}$$

Die rechte Seite variiert in den Intervallen I_k monoton von $+\infty$ bis $+\pi$ und wieder von $+\pi$ bis $+\infty$. Also hat $P_\lambda(\zeta)$ in jedem Intervall I_k mindestens zwei Nullstellen, nach früher auch nicht mehr. Damit ist gezeigt:

Wenn $0 < \lambda \leq \frac{1}{9}$ ist, so besitzt $P_\lambda(\zeta)$ nur reelle Nullstellen und zwar je zwei in jedem der Intervalle I_k .

3. Sei weiter dagegen λ sehr gross. Es ist dann gleichmässig für $\varkappa = -\delta \leq -2$:

$$\mathfrak{D}_\lambda(\varkappa) = \frac{\lambda^{-\lambda_\delta} e^{-\lambda}}{\lambda(1+\delta)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right); \quad \Gamma(1-\lambda\varkappa) = \sqrt{2\pi\lambda\delta} \lambda^{\lambda_\delta} \varkappa^{\lambda_\delta} e^{-\lambda\varkappa} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right);$$

$$\frac{1}{\mathfrak{D}_\lambda(\varkappa)\Gamma(1-\lambda\varkappa)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda\delta}} e^{-\lambda(\log_3 1-\varkappa)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right).$$

Durch zweimaliges Differenzieren ergibt sich daher

$$\left(\frac{d}{d\delta}\right)^2 \frac{1}{\mathfrak{D}_\lambda(\varkappa)\Gamma(1-\lambda\varkappa)} = \frac{\lambda^2 \log^2 \delta}{\sqrt{2\pi\lambda\delta}} e^{-\lambda(\log_3 1-\varkappa)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right),$$

wo von der Bemerkung in Kap. II, § 10 Gebrauch gemacht ist.

Diesen Formeln entnimmt man, dass, wenn $-\varkappa = \delta$ zunimmt, der Bruch

$$\frac{1}{\mathfrak{D}_\lambda(\varkappa)\Gamma(1-\lambda\varkappa)} \quad \text{für } \varkappa \leq -2$$

monoton gegen Null strebt und stets eine positive zweite Ableitung nach δ , also auch nach $\varkappa = -\delta$, hat. Folglich nimmt auch der Bruch

$$\frac{1}{Q_\lambda(\varkappa)\Gamma(1-\varkappa)},$$

wenn λ hinreichend gross ist, für $\varkappa \rightarrow -\infty$ im Intervall

$$\varkappa \leq -2\lambda$$

monoton gegen Null ab und besitzt stets eine positive zweite Ableitung nach \varkappa . Die Nullstellen von $P_\lambda(\varkappa)$ liegen für grosses λ aber alle im vorigen Intervall und genügen der Gleichung

$$\frac{1}{Q_\lambda(\varkappa)\Gamma(1-2)} = \frac{\sin \pi \varkappa}{\pi}.$$

Ferner ist in den Intervallen I_k die rechte Seite dieser Gleichung stets positiv und zwischen den Werten 0 und $\frac{1}{\pi}$, sowie von negativer zweiter Ableitung. Daraus ergibt sich:

Wenn λ hinreichend gross ist, so existiert eine natürliche Zahl $\nu = \nu(\lambda)$, so dass $P_\lambda(\varkappa)$ in keinem der Intervalle

$$I_0, I_1, \dots, I_{\nu-1}$$

Nullstellen hat, dagegen in I_ν zwei einfache oder eine doppelte Nullstelle und in jedem der Intervalle

$$I_{\nu+1}, I_{\nu+2}, I_{\nu+3}, \dots$$

genau zwei einfache Nullstellen.

Denn wenn in einem der Intervalle

$$I_\nu, I_{\nu+1}, \dots$$

mehr Nullstellen lägen, so müsste nach dem Rolleschen Satz die erste Ableitung von

$$\frac{1}{Q_\lambda(\zeta)\Gamma(1-\zeta)} - \frac{\sin \pi \zeta}{\pi}$$

dort mindestens zweimal, die zweite also mindestens einmal verschwinden. Das ist aber unmöglich.

4. Wenn $\lambda < 1$ ist, so besitzt $P_\lambda(\zeta)$ auf der Strecke $\zeta \geq -[\lambda]$, wo $[\lambda]$ das grösste Ganze von λ ist, gewiss keine Nullstellen. Sei dagegen $\lambda \geq 1$. Dem Integral

$$Q_\lambda(\zeta) = \frac{\lambda^\zeta e^{-\lambda}}{\lambda - \zeta} \left\{ 1 - \lambda \int_0^\infty \alpha'(u) e^{-(\lambda-\zeta)u - \lambda\alpha(u)} du \right\}$$

entnimmt man sogleich, dass in I_k

$$0 < Q_\lambda(\zeta) \leq \lambda^{-2-2k} e^{-\lambda}$$

ist; im gleichen Intervall hat man

$$0 < \Gamma(1-\zeta) \leq (2k+2)!$$

Genügt daher ζ der Bedingung

$$\zeta \geq -[\lambda],$$

so ist in den Intervallen I_k :

$$0 < Q_\lambda(\zeta)\Gamma(1-\zeta) \leq \frac{(2k+2)!}{\lambda^{2k+2} e^\lambda} < \pi,$$

da notwendig $2k+2 \leq [\lambda] \leq \lambda$ ist.

Folglich kann $P_\lambda(\zeta)$ im Intervall $-[\lambda] \leq \zeta \leq 0$ nicht verschwinden; in den Intervallen I_k ist $P_\lambda(\zeta)$ hier immer positiv.

Nach der Funktionalgleichung von $P_\lambda(\zeta)$ ist aber ⁹⁾

$$e^\lambda P_\lambda(\zeta - 2) = \frac{e^\lambda P_\lambda(\zeta) + \lambda^{\zeta-2}(\lambda + \zeta - 1)}{(\zeta - 1)(\zeta - 2)};$$

sei jetzt $P_\lambda(\zeta) \leq 0$ und ζ in einem der Intervalle I_k , also ist gewiss $\zeta < -[\lambda]$ und erst recht $\lambda + \zeta - 1 < 0$; dann wird offenbar $P_\lambda(\zeta - 2) < 0$. Aus den früheren Angaben über das Vorzeichen von $P_\lambda(\zeta)$ ausserhalb der Intervalle I_k folgt daher:

Wenn für einen reellen Wert von ζ

$$P_\lambda(\zeta) \leq 0$$

⁹⁾ Siehe hierzu: N. NIELSEN, l. c. 4), S. 32.

ist, so gilt

$$P_\lambda(\zeta - 2) < 0$$

5. In der Gleichung für die Nullstellen von $P_\lambda(\zeta)$:

$$\frac{1}{Q_\lambda(\zeta)\Gamma(1-\zeta)} = \frac{\sin \pi \zeta}{\pi}$$

ist die linke Seite offenbar eine monoton wachsende Funktion von λ . Von den beiden Kurven

$$C_1(\lambda): w = \frac{1}{Q_\lambda(\zeta)\Gamma(1-\zeta)} \quad \text{und} \quad C_2: w = \frac{\sin \pi \zeta}{\pi}$$

ist die zweite von λ unabhängig, die erste dagegen entfernt sich mit wachsendem λ in jedem Punkte monoton von der ζ -Achse. Da nach § 3 für sehr grosse Werte von λ beiden Kurven Punkte gemein sind, so gilt dies erst recht für kleinere Werte dieses Parameters. Nach dem vorigen Abschnitt ergibt sich, dass eine kleinste Zahl $\nu = \nu(\lambda)$ existiert, so dass $P_\lambda(\zeta)$ in den Intervallen

$$I_0, I_1, I_2, \dots, I_{\nu-1}$$

keine, in den Intervallen

$$I_\nu, I_{\nu+1}, I_{\nu+2}, \dots$$

eine nichtverschwindende gerade Anzahl von Nullstellen besitzt. Sei diese Anzahl in

$$I_k \quad (k = \nu, \nu + 1, \dots)$$

gleich

$$2 + M_k(\lambda)$$

und

$$\mathfrak{M}(\lambda) = \sum_{\nu}^{\infty} M_k(\lambda),$$

falls diese Summe existiert; bedeute ferner $\mathfrak{M}(\lambda)$ die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von $P_\lambda(\zeta)$, wenn diese Anzahl endlich ist.

Wir lassen λ von Werten im Intervall

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{9}$$

stetig bis zum Werte λ_0 wachsen. Alsdann schneidet die Kurve $C_1(\lambda)$ in jedem Augenblick die Kurve C_2 in den Intervallen

$$I_k \quad (k = \nu(\lambda_0), \nu(\lambda_0) + 1, \dots)$$

in zwei Punkten, die sich während des Prozesses stetig ändern. Am Anfang hatte aber $C_1(\lambda)$ in jedem der Intervalle

$$I_k \quad (k = 0, 1, \dots, \nu(\lambda_0) - 1)$$

noch je zwei Schnittpunkte mit C_2 gemein und sonst keine. Die Nullstellen von $P_\lambda(\zeta)$, die diesen Schnittpunkten entsprechen, müssen der Stetigkeit halber teils in die $\mathfrak{N}(\lambda_0)$ komplexen Nullstellen von $P_{\lambda_0}(\zeta)$, teils in die $\mathfrak{M}(\lambda_0)$ Nullstellen, die die Zweierzahl in den Intervallen

$$I_k \quad (k = \nu(\lambda_0), \nu(\lambda_0) + 1, \dots)$$

überschreiten, am Ende des Wachstums von λ übergegangen sein.

Daher besteht die Identität

$$(IV_a) \quad \mathfrak{N}(\lambda_0) + \mathfrak{M}(\lambda_0) = 2\nu(\lambda_0)$$

die insbesondere die Endlichkeit von $\mathfrak{N}(\lambda_0)$ und $\mathfrak{M}(\lambda_0)$ zeigt.

Daraus, dass $C_1(\lambda)$ sich in jedem Punkt monoton von der ζ -Achse entfernt, wenn λ wächst, folgt noch, dass $\nu(\lambda)$ eine wachsende Funktion von λ ist.

6. Die Formel (IV_a) gestattet eine besonders interessante Folgerung, wenn λ sehr gross ist. In diesem Fall ist nach § 3 die Zahl $\mathfrak{M}(\lambda)$ gleich Null. Daher gilt die schärfere Beziehung

$$\mathfrak{N}(\lambda) = 2\nu(\lambda) \quad \text{für } \lambda \geq \lambda_0.$$

Die Zahl $\nu(\lambda)$ lässt sich jetzt leicht sehr genau annähern. Sie ergibt sich aus der Definition, dass $P_\lambda(\zeta)$ in $I_{\nu-1}$ nicht, in I_ν wohl verschwindet, oder anders gesagt, dass $\mathfrak{P}_\lambda(-\delta)$ im Intervall

$$\frac{2\nu - 1}{\lambda} \leq \delta \leq \frac{2\nu}{\lambda}$$

keine, im Intervall

$$\frac{2\nu + 1}{\lambda} \leq \delta \leq \frac{2\nu + 2}{\lambda}$$

mindest eine Nullstelle hat. Die Nullstellen von $\mathfrak{P}_\lambda(-\delta)$ genügen aber der Gleichung

$$\log(-\sin \pi \lambda \delta) = G_\lambda(\delta); \quad G_\lambda(\delta) \equiv -\lambda(\delta \log \delta - 1 - \delta) + \frac{1}{2} \log \frac{\pi \lambda (1 + \delta)^2}{2\delta} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Also muss $G_\lambda(\delta)$ im Intervall

$$\frac{2\nu - 1}{\lambda} \leq \delta \leq \frac{2\nu}{\lambda}$$

nur positiv, im Intervall

$$\frac{2\nu + 1}{\lambda} \leq \delta \leq \frac{2\nu + 2}{\lambda}$$

auch negativ sein und also kann sich $\frac{2\nu(\lambda)}{\lambda}$ nur um ein Glied der Ordnung $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ von der Nullstelle des Ausdrucks $G_\lambda(\zeta)$ unterscheiden; setzen wir aber

$$\delta = Z + \varepsilon; \quad Z = o(1); \quad \varepsilon = r_o(o), \quad \log \varepsilon = 1 + \frac{1}{\varepsilon},$$

so folgt

$$\delta \log \delta - 1 - \delta = Z \log \alpha + O(Z^2),$$

$$\frac{1}{2\lambda} \log \frac{\pi \lambda (1 + \delta)^2}{2\delta} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{2\lambda} \log \lambda + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

und durch Vergleich beider Abschätzungen

$$Z = \frac{\log \lambda}{2\lambda \log \alpha} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$\delta = \alpha \left[1 + \frac{\log \lambda}{2\lambda(\alpha + 1)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right];$$

somit gelangt man zu dem Wert von $\nu(\lambda)$:

$$(IV_{\beta}) \quad 2\nu(\lambda) = \mathfrak{N}(\lambda) = \alpha \lambda + \frac{\alpha}{2(\alpha + 1)} \log \lambda + O(1).$$

7. Es gelingt unschwer, das O -Glied der vorigen Abschätzung genauer zu bestimmen. Wie mir Herr G. RASCH vor kurzem mitteilte, ist er unabhängig von mir zu den Ergebnissen dieses Kapitels gelangt, auf einem verschiedenem Wege. Er hat die obige Abschätzung weiter geführt. *Wichtiger ist jedoch sein Nachweis, dass die Gleichung*

$$\mathfrak{N}(\lambda) = 0,$$

die oben nur für sehr kleines und sehr grosses λ bewiesen wurde, *allgemein gilt, also auch die Formel:*

$$\mathfrak{N}(\lambda) = 2\nu(\lambda).$$

Daraus folgt weiter, dass es eine Folge von Zahlen

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

gibt, so dass für

$$\lambda_{\nu-1} < \lambda \leq \lambda_{\nu}$$

die Funktion $P_{\lambda}(\tau)$ genau 2ν nichtreelle Nullstellen besitzt. Aus der Formel (IV $_{\beta}$) ergibt sich sofort, dass

$$(IV_{\gamma}) \quad \lambda_{\nu} = \frac{2\nu}{\alpha} - \frac{1}{2(\alpha + 1)} \log \nu + O(1)$$

ist; diesen Ausdruck hat Herr RASCH etwas weiter ausgerechnet. Auch ich war bereits im Herbst 1926 vermutungsweise zu den RASCH-schen Sätzen gelangt, ohne zu einem strengen Beweis zu kommen. Umso bemerkenswerter ist es, dass der Beweis von Herrn RASCH gerade darauf beruht, dass allgemein

$$\left(\frac{d}{d\tau}\right)^2 \frac{1}{Q_{\lambda}(\tau) \Gamma(1-\tau)} > 0 \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} \tau - 1 < -\alpha \\ \tau < -3 \end{array}$$

nachgewiesen wird, wie dies oben für grosse λ geschehn ist.

Es war oben nachgewiesen worden, dass $P_\lambda(z)$ für $0 < \lambda \leq \frac{1}{9}$ nur reelle Nullstellen besitzt. Ohne Benutzung der RASCH-schen Satz gelingt es leicht, eine obere Schranke λ_0 zu bestimmen, so dass $P_\lambda(z)$ für $0 < \lambda \leq \lambda_0$ nur reelle Nullstellen hat, dagegen für jedes genügend kleine $\varepsilon > 0$ und $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$ die Funktion $P_\lambda(z)$ mindestens eine nichtreelle Nullstelle besitzt.

Es ist jede Nullstelle z Schnittpunkt der Kurven

$$C_1(\lambda): w = \frac{1}{Q_\lambda(z)\Gamma(1-z)}; \quad C_2: w = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

Sei λ_0 der kleinste Wert, für den $C_1(\lambda)$ die Kurve C_2 in einem Punkte z_0 des Intervalles

$$-2 \leq z_0 \leq -1$$

berührt. In allen folgenden Intervallen I_k trifft $C_1(\lambda_0)$ die Kurve C_2 in genau zwei getrennten einfachen Schnittpunkten. Dasselbe ist also auch noch der Fall, wenn $\lambda - \lambda_0 = \varepsilon > 0$ hinreichend klein ist; die zwei in I_0 verloren gegangenen reellen Nullstellen haben sich also in zwei nichtreelle verwandelt, so dass $P_\lambda(z)$ nicht mehr nur reelle Nullstellen besitzt. Es genügt somit, das Paar λ_0, z_0 mit möglichst kleinem λ_0 zu bestimmen, für das $P_\lambda(z)$ eine Doppelnullstelle z_0 hat. Statt dessen ist es auch hinreichend, das Zahlpaar λ_0, z_0 mit kleinstem λ_0 und $-2 \leq z_0 \leq -1$ zu finden, so dass die beiden transzendenten Gleichungen

$$\frac{1}{z} - \frac{\lambda}{1!(z+1)} + \frac{\lambda^2}{2!(z+2)} - + \dots = 0,$$

$$\frac{1}{z^2} - \frac{\lambda}{1!(z+1)^2} + \frac{\lambda^2}{2!(z+2)^2} - + \dots = 0$$

erfüllt sind. Begnügt man sich in beiden Gleichungen mit den drei ersten Gliedern, so lassen sie sich auf quadratische Gleichungen zurückführen. Es ergeben sich auf diese Weise die Näherungswerte

$$z_0 = -1 - \sqrt{\sqrt{2} - 1} = -1,6436,$$

$$\lambda_0 = -\frac{1 - \sqrt{\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{\sqrt{2} - 1}} + \sqrt{\left(\frac{1 - \sqrt{\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{\sqrt{2} - 1}}\right)^2 + 2\frac{1 - \sqrt{\sqrt{2} - 1}}{1 + \sqrt{\sqrt{2} - 1}}} = 0,3066.$$

Durch zweimalige Anwendung der Newtonschen Auflösungs-methode ergeben sich die Werte:

$$z_0 = -1,6442352\dots, \quad \lambda_0 = 0,3080896\dots$$

Damit ist das grösste Intervall $0 < \lambda \leq \lambda_0$ bestimmt, in dem $P_\lambda(z)$ nur reelle Nullstellen besitzt.

Es ist bemerkenswert, dass für $\lambda < 0$, $P_\lambda(z)$ stets nur reelle Nullstellen hat. Denn der Gleichung für diese Nullstellen

$$\frac{1}{z} - \frac{\lambda}{1!(z+1)} - \frac{\lambda^2}{2!(z+2)} + \frac{\lambda^3}{3!(z+3)} + \dots = 0$$

entnimmt man die Existenz von genau je einer im Intervall

$$-n \leq z \leq -n+1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Für $-\frac{1}{9} \leq \lambda < 0$ folgt aber genau wie in (2), dass keine nichtreellen Nullstellen vorhanden sind; aus Stetigkeitsgründen gilt dies daher allgemein. Herr Prof. Dr. E. HILLE teilte mir im Juni 1927 mit, dass von allgemeineren Fragen her auch er zu diesen Ergebnis gelangt ist.

Zum Schluss sei bemerkt, dass die Formeln dieses Kapitels über die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von $P_\lambda(z)$ sich in gewisser Form auch auf den Fall komplexen λ 's ausdehnen lassen. Wenn $|\operatorname{arc} \lambda| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$ und $|\lambda|$ sehr gross ist, so gilt für die Anzahl der Nullstellen von $P_\lambda(z)$, die den Ungleichungen

$$|z+n| \geq a > 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

genügen, wahrscheinlich der Ausdruck

$$\mathfrak{N}_a(\lambda) = r_0(\varphi)|\lambda| + \frac{\log |\lambda|}{2 \log r_0(\varphi)} + O(1).$$

Dabei ist $r_0(\varphi)$ die früher definierte Zahl.

LITERATUR.

BOURGUET (1), *Sur la fonction Eulérienne*, Acta Mathematica II (1883), S. 296-298.

BOURGUET (2), *Sur la fonction Eulérienne*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris 96 (1883), S. 1307-1310.

FRANKEIN (3), *Calculation of the zeros of the funktion complementary to the incomplete Gammafunktion*, Annals of Mathematics (2) XXI (1919), S. 61-63.

GRONWALL (4), *Sur les zéros des fonctions $P(\chi)$ et $Q(\chi)$ associées à la fonction gamma*, Annales de l'École Normale supérieure, (3) XXXIII (1916), S. 381-393.

HASKIN (5), *On the zeros of the funktion $P(\chi)$ complementary to the incomplete Gammafunktion*, Transactions of the American Mathematical Society XVI (1915), S. 405-412.

LINDHAGEN (6), *Studier öfver Gammafunktioner*, Dissertation Stockholm (1887).

NIELSEN (7), *Handbuch der Gammafunktion*, (1906), Leipzig.

RASCH (8), *Beitrag zur Theorie der unvollständigen Gammafunktionen* Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, VIII (1927), 2.

WALTHER (9), *Ueber die reellen Nullstellen der unvollständigen Gammafunktion $P(\chi)$* , Mathematische Zeitschrift XXIII (1925), S. 238-245.

Ausserdem sind mehrere Arbeiten von RASCH und HILLE über die Nullstellen der unvollständigen Gammafunktionen im Druck.

[Anmerkung bei der Korrektur im April 1929: Die Arbeiten von RASCH und HILLE sind inzwischen erschienen; sie lauten:

G. RASCH, *Ueber die Nullstellen der unvollständigen Gammafunktion $P(\chi, \rho)$. I. Die reellen Nullstellen von $P(\chi, \rho)$ bei positivem reellem ρ* . Mathematische Zeitschrift 29 (1928), S. 300.

E. HILLE und G. RASCH, *Ueber die Nullstellen der unvollständigen Gammafunktion $P(\chi, \rho)$. II. Geometrisches über die Nullstellen*. Mathematische Zeitschrift 29 (1928) S. 319].

Krefeld, März 1928.

KURT MAHLER.