MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

Sonderabdruck aus Band 100, Heft 3.

Kurt Mahler

Über einen Satz von Mellin.

BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1928

Über einen Satz von Mellin.

Von

Kurt Mahler in Göttingen.

In seiner Arbeit[1]): „Eine Formel für den Logarithmus transzendenter Funktionen von endlichem Geschlecht“ bewies Hj. Mellin, daß die Reihe

$$f(s) = \sum_{1}^{\infty} \cdots \sum_{1}^{\infty} f(n_1 \ldots n_p)^{-s},$$

wo $f(x_1 \ldots x_p)$ ein Polynom in p Veränderlichen mit Koeffizienten von positivem Realteil ist, sich in die ganze s-Ebene als eine meromorphe Funktion fortsetzen lasse, die allein Pole auf der reellen Achse besitzt. Er gab ferner eine Abschätzung von $|f(s)|$, wenn s parallel der imaginären Achse ins Unendliche rückt. Diese Abschätzung und zwar in besserer Form, ferner die Fortsetzbarkeit bewies E. Landau auf ganz andere Art[2]) im Falle $p = 1$ in der Arbeit: „Über einen Mellinschen Satz“. In der vorliegenden Arbeit wird der Mellinsche Satz für den allgemeinen Fall, daß weder $f(x_1 \ldots x_p)$, noch der höchste homogene Bestandteil hiervon im ersten „Oktanten“:

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad \ldots, \quad x_p > 0$$

verschwindet, aufs neue und zwar mit ganz elementaren Mitteln, besonders der Eulerschen Summenformel, bewiesen. Je nach den Realitätsannahmen, die über $f(x_1 \ldots x_p)$ gemacht sind, werden andere Abschätzungen von $f(s)$ in Streifen parallel der imaginären Achsen erhalten, Abschätzungen, die die Mellinsche und Landausche als Sonderfall enthalten.

Kapitel I.

I.

1. Mit $x_1, x_2, \ldots, x_p$ seien p nichtnegative reelle Variable bezeichnet:

$$x_l \geqq 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, p).$$

---

[1]) Acta soc. scient. fennicae **29** (1900), Nr. 4.

[2]) Archiv der Math. und Physik (3) **24** (1915), 2. Heft.

Weiter seien

$$f(x_1\, x_2 \ldots x_p) = f(x)$$

$$g(x_1\, x_2 \ldots x_p) = g(x)$$

zwei Polynome mit beliebigen komplexen Koeffizienten vom Grade m und n. Sie zerfallen folgendermaßen im homogene Bestandteile:

$$f(x) = f_m(x) + f_{m-1}(x) + \ldots + f_0(x)$$

$$g(x) = g_n(x) + g_{n-1}(x) + \ldots + g_0(x).$$

Der Index gibt dabei die Dimension an.

Sei zur Abkürzung

$$v = \left|\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2}\right|.$$

Das Polynom $f(x)$ gehöre zu einer der folgenden drei Klassen, von denen jede eine Unterklasse der vorherigen ist:

A: $\quad |f(x)| > 0$ für alle $x_l \geqq 0$; $\qquad |f_m(x)| > 0$ für $v > 0$

B: $R\,(f(x)) > 0$ für alle $x_l \geqq 0$; $\qquad R(f_m(x)) > 0$ für $v > 0$

C: $\quad f(x) > 0$ für alle $x_l \geqq 0$; $\qquad f_m(x) > 0$ für $v > 0$.

2. $f_m(x)$ ist in dem beschränkten Bereich $v = 1$ stetig und von Null verschieden; daher existieren zwei positive Konstante c_1, c_2, so daß gleichmäßig für alle x:

$$2\,c_1 \leqq \left| f_m\left(\frac{x}{v}\right)\right| \leqq \frac{c_2}{2}$$

oder

$$2\,c_1\, v^m \leqq |f_m(x)| \leqq \frac{c_2}{2}\, v^m$$

ist. Folglich ist von einer Grenze $v_0 \geqq 0$ an:

$$c_1\, v^m \leqq |f(x)| \leqq c_2\, v^m \quad \text{für } v \geqq v_0.$$

Weiter gibt es eine positive Konstante c_3, so daß

$$|g(x)| \leqq c_3\, v^n \quad \text{für } v \geqq v_0$$

ist.

In der Zerlegung

$$f(x) = f_m(x)(1 + r(x)); \qquad r(x) = \frac{f_{m-1}(x) + f_{m-2}(x) + \ldots + f_0(x)}{f_m(x)}$$

befriedigt $r(x)$ die Ungleichung

$$|v\, r(x)| \ngeqq c_4 \quad \text{für} \quad v \geqq v_0,$$

wenn c_4 eine hinreichend große positive Konstante bedeutet. Ist also δ ein beliebiger positiver echter Bruch, so gibt es hierzu eine Zahl $v_1 = v_1(\delta) \geqq v_0$, so daß zugleich

$$|r(x)| \leqq \delta \qquad |\operatorname{arc}(1 + r(x))| \leqq \delta \qquad \text{für } v \geqq v_1(\delta)$$

ist und erst recht

$$|\tau r(x)| \leqq \delta \qquad |\operatorname{arc}(1+\tau r(x))| \leqq \delta \qquad \text{für } 0 \leqq \tau \leqq 1,\ v \geqq v_1(\delta).$$

3. Da $f_m(x)$ in dem endlichen und einfach zusammenhängenden Bereich $v = 1$ stetig und von Null verschieden ist, so stellt hier $\log f_m(x)$ eine eindeutige und stetige Funktion dar, wenn noch der Zweig des Logarithmus in einem beliebigen Punkt beliebig ausgewählt wird. Wir definieren allgemein:

$$\log f_m(x) = \log f_m\left(\frac{x}{v}\right) + m \log v \quad \text{für } v > 0.$$

Diese Funktion ist eindeutig und stetig; es gibt eine positive Konstante M, so daß

$$|J(\log f_m(x))| \leqq M \quad \text{für } v > 0$$

ist.

Vermöge der vorigen Ungleichungen für $r(x)$ wird ferner durch die Forderung

$$\left|J\Big(\log(1+\tau r(x))\Big)\right| \leqq \frac{\pi}{2} \quad \text{für } v \geqq v_1(\delta)$$

eine in den x_l und τ stetige Funktion $\log(1+\tau r(x))$ definiert.

Schließlich wird durch

$$\log f(x) = \log f_m(x) + \log(1 + r(x)) \quad \text{für } v \geqq v_1(\delta)$$

eine eindeutige und stetige Funktion erhalten. $f(x)$ ist noch in dem endlichen einfach zusammenhängenden Bereich $0 \leqq v \leqq v_1$ stetig und von Null verschieden; $\log f(x)$ läßt sich also auch hierher als eindeutige und stetige Funktion fortsetzen, so daß damit $\log f(x)$ als eindeutige und stetige Funktion im ganzen Bereich der Veränderlichen definiert ist. Vermöge dieser Definition existiert eine positive Konstante N, so daß für alle $x_l \geqq 0$

$$\left|J\Big(\log(f(x))\Big)\right| \leqq N$$

ist.

Gehört $f(x)$ zur Klasse A, so können die Zahlen M und N beliebig groß werden; dagegen darf man ohne Einschränkung fordern:

wenn $f(x)$ zur Klasse B gehört:

$$0 \leqq M < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqq N < \frac{\pi}{2};$$

wenn $f(x)$ zur Klasse C gehört:

$$M = N = 0.$$

4. Sei $s = \sigma + ti$ eine komplexe Veränderliche und

$$f_m(x)^{-s} = e^{-s \log f_m(x)}$$

$$f(x)^{-s} = e^{-s \log f(x)}$$

$$(1+\tau r(x))^{-s} = e^{-s \log(1+\tau r(x))},$$

mit den früher definierten Zweigen des Logarithmus. Verstehen wir unter c_5 die Konstante

$$c_5 = \max\left(c_1, c_2, \frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\right),$$

so ist nach den vorherigen Abschätzungen:

$$|f_m(x)^{-s}| \leqq c_5^{|\sigma|} e^{M|t|} v^{-m\sigma} \qquad \text{für} \quad v \geqq 0$$

$$\left.\begin{aligned} |f(x)^{-s}| &\leqq c_5^{|\sigma|} e^{N|t|} v^{-m\sigma} \\ |g(x) f_m(x)^{-s}| &\leqq c_3 c_5^{|\sigma|} e^{M|t|} v^{n-m\sigma} \\ |g(x) f(x)^{-s}| &\leqq c_3 c_5^{|\sigma|} e^{N|t|} v^{n-m\sigma} \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad v \geqq v_0.$$

Weiter gibt es einen positiven echten Bruch δ_0, so daß gleichmäßig

$$|g(x) f(x)^{-s}| \leqq c_3 c_5^{|\sigma|} e^{N|t|} v^{n-m\sigma} \qquad \text{für} \quad v \leqq w,\ w \geqq v_1(\delta)$$

ist, wenn

$$0 < \delta \leqq \delta_0.$$

Schließlich besteht die Ungleichung:

$$|(1 + \tau r(x))^{-s}| \leqq (1-\delta)^{-|\sigma|} e^{\delta|t|} \qquad \text{für} \quad 0 \leqq \tau \leqq 1,\ v \geqq v_1(\delta).$$

5. Die Zahlen

$$u_l = \frac{x_l}{v} \geqq 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, p)$$

befriedigen die Identität

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_p^2 = 1.$$

Deutet man die x_l als rechtwinklige Koordinaten in einem p-dimensionalen Raum, so liegt der Punkt u_l auf dem ersten „Oktanten" O der Einheitskugel. Das Oberflächendifferential $d\omega$ dieser Einheitskugel befriedigt die identische Gleichung:

$$dx_1\, dx_2 \ldots dx_p = v^{p-1}\, dv\, d\omega.$$

II.

6. Das Integral

$$J(s) = \overline{\underline{\int \ldots \int}}_{0}^{\infty} g(x) f(x)^{-s}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p$$

geht vermöge der letzten Formel über in

$$J(s) = \int\limits_O \int\limits_0^\infty v^{p-1} g(uv) f(uv)^{-s}\, dv\, d\omega.$$

Dies Integral zerlegen wir in

$$J(s) = \int\limits_O \int\limits_0^w + \int\limits_O \int\limits_w^\infty = J_1(s, w) + J_2(s, w) \qquad (w \geqq v_1(\delta))$$

7. Das Integral $J_1(s, w)$ wird über einen endlichen Bereich erstreckt, der Integrand ist in s regulär, in u_l, v stetig. Daher stellt $J_1(s, w)$ eine ganze Funktion von s dar. Nach den Abschätzungen in 4. ist

$$|J_1(s, w)| \leqq c_3 c_6 c_5^{|\sigma|} e^{N|t|} w^{p+n-m\sigma} \qquad c_6 = \int_O d\omega.$$

Wird σ auf das endliche Intervall

$$\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$$

beschränkt, so gilt folglich gleichmäßig in σ:

$$J_1(s, w) = O(e^{N|t|}).$$

Wenn $f(x)$ zur Klasse C gehört, so ist $J_1(s, w)$ in diesem Streifen sogar beschränkt.

8. Im Integral

$$J_2(s, w) = \int_O \int_w^\infty v^{p-1-ms} g(uv) f_m(u)^{-s} \{1 + r(uv)\}^{-s} dv\, d\omega$$

gestattet der letzte Faktor folgende abbrechende Taylorentwicklung:

$$\{1 + r(uv)\}^{-s} = \sum_0^{k-1} \binom{-s}{l} r(uv)^l +$$
$$+ k \binom{-s}{k} r(uv)^k \int_0^1 \{1 + \tau r(uv)\}^{-s-k} (1-\tau)^{k-1} d\tau;$$

dabei bedeutet k eine beliebige natürliche Zahl. $J_2(s, w)$ kann daher zerlegt werden:

$$J_2(s, w) = \sum_0^{k-1} \binom{-s}{k} M_l(s, w) + N_k(s, w),$$

und hier ist

$$M_l(s, w) = \int_O \int_w^\infty v^{p-1-ms} g(uv) f_m(u)^{-s} r(uv)^l dv\, d\omega,$$

$$N_k(s, w) =$$
$$= \int_O \int_w^\infty \int_0^1 k \binom{-s}{k} v^{p-1-ms} g(uv) f_m(u)^{-s} r(uv)^k \{1 + \tau r(uv)\}^{-s-k} (1-\tau)^{k-1} d\tau\, dv\, d\omega.$$

9. Im Integral $M_l(s, w)$ ist

$$g(uv) = v^n \{g_n(u) + v^{-1} g_{n-1}(u) + \ldots + v^{-n} g_0(u)\},$$

$$r(uv) = v^{-1} \left\{\frac{f_{m-1}(u)}{f_m(u)} + v^{-1} \frac{f_{m-2}(u)}{f_m(u)} + \ldots + v^{-(m-1)} \frac{f_0(u)}{f_m(u)}\right\},$$

folglich:

$$g(uv) r(uv)^l = v^{n-l} \sum_{h=0}^{n+(m-1)l} A_h^{(l)}(u) v^{-h}; \qquad A_0^{(0)} = g_n(u).$$

Dabei sind die $A_h^{(l)}(u)$ rationale Funktionen und auf O stetig.

$M_l(s, w)$ nimmt also die Form an:

$$M_l(s, w) = \sum_{h=0}^{n+(m-1)l} \int\limits_0 \int\limits_w^\infty v^{n+p-ms-l-h-1} A_h^{(l)}(u) f_m(u)^{-s} \, dv \, d\omega .$$

Wenn

$$\sigma > \frac{n+p}{m}$$

ist, darf die Integration nach v ohne weiteres ausgeführt werden. Man erhält dann

$$M_l(s, w) = \sum_0^{n+(m-1)l} \frac{C_h^{(l)}(s, w)}{ms + l + h - n - p};$$

$$C_h^{(l)}(s, w) = w^{n+p-ms-h-l} \int\limits_0 A_h^{(l)}(u) f_m(u)^{-s} \, d\omega .$$

Analog wie bei $J_1(s, w)$ folgt, daß die $C_h^{(l)}(s, w)$ ganze Funktionen von s sind, in jedem endlichen Intervall

$$\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$$

befriedigen sie gleichmäßig die Abschätzung

$$C_h^{(l)}(s, w) = O(e^{M|t|});$$

sie sind also beschränkt, wenn $f(x)$ zur Klasse C gehört.

$M_l(s, w)$ ist somit eine meromorphe Funktion mit einfachen Polen höchstens bei

$$s = \frac{n+p-l-h}{m} \qquad (h = 0, 1, \ldots, n + (m-1)l)$$

mit dem Residuum

$$\frac{1}{m} C_h^{(l)}\left(\frac{n+p-l-h}{m}, w\right);$$

natürlich hängt diese Zahl nur scheinbar von w ab. Wenn sie verschwindet, so ist $M_l(s, w)$ an den betreffenden Stellen regulär.

Insbesondere $M_0(s, w)$ und keine der anderen Funktionen $M_l(s, w)$ besitzt bei

$$s = \frac{n+p}{m}$$

einen einfachen Pol, mit dem Residuum

$$\lambda = \frac{1}{m} \int\limits_0 g_n(u) f_m(u)^{-\frac{n+p}{m}} \, d\omega .$$

Die Funktionen $M_l(s, w)$ befriedigen gleichmäßig in jedem endlichen Streifen

$$\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$$

für große $|t|$ die Abschätzung

$$M_l(s, w) = O(e^{M|t|}).$$

Wenn $f(x)$ zur Klasse C gehört, so ist $M_l(s, w)$ in diesem Streifen sogar beschränkt.

10. Der Integrand von

$$N_k(s, w) =$$

$$= \int_O \int_w^\infty \int_0^1 k\binom{-s}{k} v^{p-1-ms} g(uv) f_m(u)^{-s} r(uv)^k \{1 + \tau r(uv)\}^{-s-k} (1-\tau)^{k-1} d\tau\, dv\, d\omega$$

besitzt nach den früheren Abschätzungen die Majorante:

$$k\left|\binom{-s}{k}\right| \cdot v^{p-1-ms} \cdot c_3 c_5^{|\sigma|} e^{M|t|} v^n \cdot c_4^k v^{-k} \cdot (1-\delta)^{-|\sigma|-k} \cdot e^{\delta|t|}$$

oder anders geschrieben:

$$k\left|\binom{-s}{k}\right| \cdot \{c_3 c_4^k c_5^{|\sigma|} (1-\delta)^{-|\sigma|-k}\} \cdot e^{(M+\delta)|t|} \cdot v^{n+p-1-k-m\sigma}.$$

Wird s auf den endlichen Bereich

$$\sigma \geqq \frac{n+p-k+\varepsilon}{m}, \qquad |s| \leqq R,$$

wo ε und R^{-1} zwei sehr kleine positive Konstanten sind, beschränkt, so konvergiert folglich das Integral für $N_k(s, w)$ absolut und gleichmäßig; also ist $N_k(s, w)$ in der Halbebene

$$\sigma > \frac{n+p-k}{m}$$

eine reguläre Funktion. In einem endlichen Streifen

$$\frac{n+p-k}{m} < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$$

ist gleichmäßig in σ für große $|t|$:

$$N_k(s, w) = O(|t|^k e^{(M+\delta)|t|}).$$

Sei jetzt ϑ eine beliebig kleine positive Konstante, $\delta = \frac{\vartheta}{2}$ gewählt, also $w \geqq v_1\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$ hinreichend groß; wegen

$$|t|^k = O\left(e^{\frac{\vartheta}{2}|t|}\right)$$

ist alsdann

$$N_k(s, w) = O(e^{(M+\vartheta)|t|}),$$

wie klein auch ϑ sei. Gehört $f(x)$ zur Klasse B, ist also $M < \frac{\pi}{2}$, so kann ϑ so klein gewählt werden, daß auch

$$M + \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

ist. Wenn dagegen $f(x)$ zur Klasse C gehört, so kann eine viel bessere Abschätzung im Streifen

$$\frac{n+p-k}{k} < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$$

erhalten werden. Im Integranden von $N_k(s, w)$ bleibt jetzt $f_m(u)$ und $1 + \tau r(uv)$ immer positiv; der Integrand besitzt folglich die Majorante

$$k\left|\binom{-s}{k}\right|\{c_3 c_4^k c_5^{|\sigma|}(1-\delta)^{-|\sigma|-k}\} v^{n+p-1-k-m\sigma}$$

und daher ist jetzt gleichmäßig für große $|t|$:

$$N_k(s, w) = O\left(\left|\binom{-s}{k}\right|\right) = O(|t|^k).$$

11. Wir fassen die letzten Ergebnisse zusammen. In der Zerlegung

$$J(s) = J_1(s, w) + \sum_{0}^{k-1}\binom{-s}{l} M_l(s, w) + N_k(s, w)$$

ist hiernach:

$J_1(s, w)$ eine ganze Funktion;

$M_l(s, w)$ eine meromorphe Funktion mit einfachen Polen höchstens bei

$$s = \frac{n+p-l-h}{m} \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, n+(m-1)l)$$

mit dem Residuum

$$\frac{1}{m} C_h^{(l)}\left(\frac{n+p-l-h}{m}, w\right);$$

$N_k(s, w)$ eine reguläre Funktion für

$$\sigma > \frac{n+p-k}{k}.$$

Folglich ist auch $J(s)$ in dieser Halbebene analytisch, mit den einfachen Polen höchstens bei

$$s = \frac{n+p-h}{m} \qquad (h = 0, 1, \ldots, k-1);$$

hiervon scheiden jedoch die Stellen

$$0, -1, -2, \ldots$$

gewiß als regulär aus, da in dem Summanden

$$\binom{-s}{l} M_l(s, w)$$

der erste Faktor bei

$$s = 0, -1, \ldots -(l-1)$$

verschwindet, die einfachen Pole des zweiten Faktors aber alle größer oder gleich

$$\frac{n+p-l-[n+(m-1)\,l]}{m} > -l$$

sind.

Im Streifen

$$\frac{n+p-k}{m} < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$$

ist

$$\binom{-s}{l} = O(|t|^k) = O(e^{\vartheta |t|}),$$

also nach den früheren Abschätzungen im Fall A und B:

$$J(s) = O(e^{N|t|}) + \sum_0^{k-1} O(e^{(M+\vartheta)|t|}) + O(e^{(M+\vartheta)|t|}) = O(e^{S|t|}),$$

wobei

$$S = \max(M+\vartheta, N).$$

Liegt der Fall B vor, so ist $M < \frac{\pi}{2}$, $N < \frac{\pi}{2}$; da ϑ beliebig klein sein darf, also auch $S < \frac{\pi}{2}$.

Wenn hingegen $f(x)$ zur Klasse C gehört, so gilt die schärfere Abschätzung

$$J(s) = O(1) + \sum_0^{k-1} O(|t|^k) + O(|t|^k) = O(|t|^k).$$

Bei den vorigen Überlegungen durfte k jede natürliche Zahl bedeuten. Wählt man $k=1$, so ergibt sich, daß $J(s)$ in der Halbebene

$$\sigma > \frac{n+p}{m}$$

konvergiert. Nimmt man dagegen für k eine sehr große Zahl, so ergibt sich die Fortsetzbarkeit von $J(s)$ als meromorphe Funktion in die ganze Ebene.

12. Zusammengefaßt lautet das Ergebnis dieses Kapitels somit:

Satz I. *Das Integral*

$$J(s) = \overbrace{\int_0 \cdots \int}^{\infty} g(x) f(x)^{-s}\, dx_1 \ldots dx_p$$

konvergiert in der Halbebene

$$\sigma > \frac{n+p}{m}$$

und stellt hier eine reguläre Funktion dar. $J(s)$ läßt sich in die ganze Ebene als meromorphe Funktion fortsetzen, mit einfachen Polen höchstens an den Stellen

$$s = \frac{n+p-h}{m} \qquad \left(\begin{array}{l} h = 0, 1, 2, \ldots \\ s \neq 0, -1, -2, \ldots \end{array}\right).$$

Insbesondere besitzt $J(s)$ im rechtesten Pol:

$$s = \frac{n+p}{m}$$

das Residuum

$$\lambda = \frac{1}{m} \int\limits_0 g_n(u) \, f_m(u)^{-\frac{n+p}{m}} \, d\omega \, .$$

In jedem endlichen Streifen

$$\frac{n+p-k}{m} < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

besteht die Abschätzung

$$J(s) = O(e^{S|t|})$$

für große $|t|$ gleichmäßig in σ. Wenn $f(x)$ zur Klasse B gehört und für $\log f(x)$ der Hauptwert genommen wird, so wird

$$0 \leqq S < \frac{\pi}{2};$$

ist endlich $f(x)$ zur Klasse C gehörig, so besteht sogar die schärfere Abschätzung

$$J(s) = O(|t|^k)$$

für große $|t|$ gleichmäßig in σ, wenn man für $\log f(x)$ den reellen Wert nimmt.

Kapitel II.

13. Die bekannte Eulersche Summenformel

$$\sum_1^\infty \mathfrak{F}(w) = \int\limits_0^\infty \mathfrak{F}(x)\, dx + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{(-1)^{l+1} B_l}{l!} \mathfrak{F}^{(l-1)}(0) + \int\limits_0^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \sigma_k(x) \mathfrak{F}^{(k)}(x)\, dx,$$

in der k eine natürliche Zahl, B_l die l-te Bernoullische Zahl und $\sigma_k(x)$ das k-te Bernoullische Polynom mit dem Argument $x - [x]$ bedeutet, darf z. B. auf solche komplexe Funktionen $\mathfrak{F}(x)$ der reellen, nichtnegativen Veränderlichen x angewandt werden, die k-mal stetig differenzierbar sind und für welche in der obigen Gleichung die Summe links und die beiden Integrale rechts absolut konvergieren und die Gleichungen

$$\lim_{x \to +\infty} \mathfrak{F}^{(l)}(x) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, k)$$

erfüllt sind.

Mit den Abkürzungen

$$h_l^{(k)}(x) = (-1)^l \frac{B_l}{l!} \qquad \text{für } l = 0, 1, \ldots, k-1$$

$$h_k^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \sigma_k(x)$$

nimmt die Eulersche Formel die Gestalt an:

$$\sum_1^\infty \mathfrak{F}(w) = \sum_{l=0}^{k} \int_0^\infty h_l^{(k)}(x)\, \mathfrak{F}^{(l)}(x)\, dx.$$

Offenbar bleiben in dieser Formel die Funktionen $h_l^{(k)}(x)$ unterhalb einer Konstanten, die von l nicht abhängt:

$$|h_l^{(k)}(x)| \leqq \varrho_k \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, k).$$

14. Seien jetzt $x_1, x_2, \ldots, x_p$ wieder p nichtnegative reelle Veränderliche und $k_1, k_2, \ldots, k_p$ p natürliche Zahlen, ferner

$$\mathfrak{F}(x_1 x_2 \ldots x_p) = \mathfrak{F}(x)$$

eine Funktion mit stetigen Ableitungen:

$$\mathfrak{F}_{l_1 l_2 \ldots l_p}(x) = \frac{\partial^{l_1+l_2+\cdots+l_p} \mathfrak{F}(x)}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \ldots \partial x_p^{l_p}} \qquad \begin{pmatrix} l_\nu = 0, 1, \ldots, k_\nu \\ \nu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}.$$

Eine p-malige Anwendung der Eulerschen Summenformel ergibt die allgemeine Gleichung:

$$\sum_{w_1=1}^\infty \cdots \sum_{w_p=1}^\infty \mathfrak{F}(w_1 \ldots w_p) = \sum_{l_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{l_p=0}^{k_p} \overline{\underline{\int \cdots \int}}_0^\infty h_{l_1}^{(k_1)}(x_1) \ldots h_{l_p}^{(k_p)}(x_p)\, \mathfrak{F}_{l_1 \ldots l_p}(x)\, dx_1 \ldots dx_p.$$

Diese Formel darf z. B. angewandt werden, wenn die Summe links und die

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_p + 1)$$

Integrale rechts absolut konvergieren.

15. Sei

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_p = k,$$
$$\mathfrak{F}(x) = g(x)\, f(x)^{-s}$$

mit den Polynomen $f(x)$ und $g(x)$ des vorigen Kapitels. In den Integralen

$$J_{l_1 \ldots l_p}(s) = \overline{\underline{\int \cdots \int}}_0^\infty h_{l_1}^{(k)}(x_1) \ldots h_{l_p}^{(k)}(x_p)\, \mathfrak{F}_{l_1 \ldots l_p}(x)\, dx_1 \ldots dx_p$$

ergibt sich für $\mathfrak{F}_{l_1 \ldots l_p}(x)$ durch Differenzieren

$$\mathfrak{F}_{l_1 \ldots l_p}(x) = \sum_{h=0}^{l} \binom{-s}{h} \varphi_{l_1 \ldots l_p}^{(h)}(x)\, f(x)^{-s-h}, \qquad l = \sum_{\nu=1}^{p} l_\nu,$$

wobei $\varphi_{l_1 \ldots l_p}^{(h)}(x)$ ein von s unabhängiges Polynom in den Veränderlichen x vom Grade

$$n + hm - l$$

ist; ist diese Zahl negativ, so verschwindet das Polynom identisch.

16. Im Falle

$$0 \leqq l_\nu \leqq k-1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

kann $J_{l_1 \ldots l_p}(s)$ zerlegt werden in der Form:

$$J_{l_1 \ldots l_p}(s) = c(l_1 l_2 \ldots l_p) \sum_{h=0}^{l} \binom{-s}{h} \overline{\int \ldots \int_0^{\infty}} \varphi^{(h)}_{l_1 \ldots l_p}(x) f(x)^{-s-h} dx_1 \ldots dx_p,$$

wobei

$$c(l_1 l_2 \ldots l_p) = h^{(k)}_{l_1}(x_1) \ldots h^{(k)}_{l_p}(x_p)$$

eine absolute Konstante ist.

Das Teilintegral

$$J^{(h)}_{l_1 \ldots l_p}(s) = \overline{\int \ldots \int_0^{\infty}} \varphi^{(h)}_{l_1 \ldots l_p}(x) f(x)^{-s-h} dx_1 \ldots dx_p$$

ist gerade von der Gestalt der Funktion $J(s)$, auf die sich Satz I bezieht. Aus diesem Satz ergibt sich, daß $J^{(h)}_{l_1 \ldots l_p}(s)$ in der Halbebene

$$\sigma = \frac{n+p-l}{m}$$

absolut konvergiert; $J^{(h)}_{l_1 \ldots l_p}(s)$ besitzt einfache Pole höchstens bei

$$s = \frac{n+p-l-j}{m} \qquad \begin{pmatrix} j = 0, 1, 2, \ldots \\ s \neq 0, -1, -2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Speziell ist

$$J_{0, 0, \ldots, 0}(s) = J^{(0)}_{0, 0, \ldots, 0}(s) = J(s);$$

allein diese Funktion besitzt bei

$$s = \frac{n+p}{m}$$

einen einfachen Pol, mit dem Residuum λ.

In dem Streifen

$$\frac{n+p-k}{m} < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$$

besteht gleichmäßig in σ für große $|t|$ die Abschätzung

$$J^{(h)}_{l_1 l_2 \ldots l_p}(s) = O\left(e^{S|t|}\right);$$

gehört $f(x)$ zur Klasse C, so läßt sich diese Abschätzung verbessern zu

$$J^{(h)}_{l_1 l_2 \ldots l_p}(s) = O(|t|^g) \qquad (g = \max(k-l, 0)).$$

Sei nun T eine Zahl, die größer als S ist:

$$T > S;$$

im Falle, daß $f(x)$ zur Klasse B gehört, also $S < \frac{\pi}{2}$ ist, nehmen wir auch

$$T < \frac{\pi}{2}$$

an. Es ist dann im Streifen

$$\frac{n+p-k}{m} < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$$

für große $|t|$:

$$\binom{-s}{h} = O(|t|^h) = O(e^{(T-\zeta)|t|})$$

und daher nach den obigen Abschätzungen:

$$J_{l_1 l_2 \ldots l_p}(s) = O(e^{T|t|}),$$

und wenn $f(x)$ zur Klasse C gehört, genauer:
für $l \leqq k$:

$$J_{l_1 l_2 \ldots l_p}(s) = O(|t|^{g+l}) = O(|t|^k),$$

für $l \geqq k$:

$$J_{l_1 l_2 \ldots l_p}(s) = O(|t|^l).$$

Da nun auf jeden Fall

$$l \leqq k \cdot p$$

ist, so besteht die Abschätzung unabhängig von l:

$$J_{l_1 l_2 \ldots l_p}(s) = O(|t|^{pk}).$$

17. Sei weiter mindestens eine der Zahlen

$$l_1, l_2, \ldots, l_p$$

gleich k. Wegen der Darstellung

$$J_{l_1 \ldots l_p}(s) = \sum_{h=0}^{l} \binom{-s}{h} J^{(h)}_{l_1 \ldots l_p}(s),$$

$$J^{(h)}_{l_1 \ldots l_p}(s) = \overline{\int \cdots \int_0^\infty} h^{(k)}_{l_1}(x_1) \ldots h^{(k)}_{l_p}(x_p)\, \varphi^{(h)}_{l_1 \ldots l_p}(x) f(x)^{-s-h}\, dx_1 \ldots dx_v$$

ergibt sich die absolute und gleichmäßige Konvergenz von $J^{(h)}_{l_1 \ldots l_p}(s)$ und damit von $J_{l_1 \ldots l_p}(s)$ in dem Bereich

$$\sigma \geqq \frac{n+p-k+\varepsilon}{m}, \qquad |s| \leqq R.$$

Denn es ist mit einer positiven Konstanten $c^{(h)}_{l_1 \ldots l_p}$:

$$|\varphi^{(h)}_{l_1 \ldots l_p}(x)| \leqq v^{hm+n-l} c^{(h)}_{l_1 \ldots l_p} \quad \text{für} \quad v \geqq v_0;$$

hieraus ergibt sich, ähnlich wie im ersten Kapitel, die Behauptung, da außerdem $l \geqq k$ und

$$|h^{(k)}_{l_1}(x_1) \ldots h^{(k)}_{l_p}(x_p)| \leqq \varrho_k^p$$

ist.

$J_{l_1 \ldots l_p}(s)$ ist somit in den Halbebenen

$$\sigma > \frac{n+p-k}{m}$$

regulär. Man findet wie im ersten Kapitel, daß im Streifen

$$\frac{n+p-k}{m} < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$$

gleichmäßig in σ für große $|t|$

$$J_{l_1 \ldots l_p}^{(h)}(s) = O(e^{S|t|}),$$

und folglich

$$J_{l_1 \ldots l_p}(s) = O(e^{T|t|})$$

ist. Wenn aber $f(x)$ zur Klasse C gehört, so bleibt $J_{l_2 \ldots l_p}^{(h)}(s)$ in jenem Streifen sogar beschränkt und folglich ist für große $|t|$

$$J_{l_1 \ldots l_p}(s) = O(|t|^l) = O(|t|^{kp}).$$

18. Das Integral

$$J(s) = \overline{\underline{\int \ldots \int}}_{0}^{\infty} g(x) f(x)^{-s} d x_1 \ldots d x_p$$

konvergiert nach früher in der Halbebene

$$\sigma > \frac{n+p}{m}$$

absolut. Nach einem bekannten Cauchyschen Konvergenzsatz konvergiert daher auch

$$Z(s) = \sum_{w_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{w_p=1}^{\infty} g(w) f(w)^{-s}$$

in dieser Halbebene absolut.

19. Nach den letzten vier Abschnitten sind daher für

$$\sigma > \frac{n+p}{m}$$

die Voraussetzungen der Eulerschen Summenformel erfüllt, so daß von ihr Gebrauch gemacht werden darf. Aus den früheren Ergebnissen folgt dann, da k jede natürliche Zahl sein kann:

Satz II. *Die Summe*

$$Z(s) = \sum_{w_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{w_p=1}^{\infty} g(w) f(w)^{-s}$$

konvergiert in der Halbebene

$$\sigma = \frac{n+p}{m}$$

und stellt hier eine reguläre Funktion dar. $Z(s)$ läßt sich in die ganze Ebene als meromorphe Funktion fortsetzen, mit einfachen Polen höchstens bei

$$s = \frac{n+p-h}{m} \qquad \begin{pmatrix} h = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \\ s \neq 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots \end{pmatrix}.$$

Insbesondere besitzt $Z(s)$ im rechtesten Pol

$$s = \frac{n+p}{m}$$

das Residuum

$$\lambda = \frac{1}{m} \int\limits_{O} g_n(u)\, f_m(u)^{-\frac{n+p}{m}}\, d\,\omega.$$

In jedem endlichen Streifen

$$\frac{n+p-k}{m} < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

gilt gleichmäßig in σ für große $|t|$ die Abschätzung

$$Z(s) = O\left(e^{T|t|}\right);$$

gehört $f(x)$ zur Klasse B und nimmt man für $\log f(x)$ den Hauptwert, so kann

$$0 \leqq T < \frac{\pi}{2}$$

angenommen werden; gehört $f(x)$ zur Klasse C, so gilt endlich die schärfere Abschätzung

$$Z(s) = O\left(|t|^{kp}\right),$$

wenn man für $\log f(x)$ den reellen Wert nimmt.

Krefeld, den 29. März 1927.

(Eingegangen am 11. 11. 1927.)