Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Herausgegeben von **K. Hensel, H. Hasse, L. Schlesinger.**
Druck und Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10.

Sonderabdruck aus Band 166 Heft 2. 1931.

Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil I.

Von *Kurt Mahler* in Göttingen.

Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil I.

Von *Kurt Mahler* in Göttingen.

In einer früheren Note (5) zeigte ich, daß die Zahl e und eine beliebige Liouville-Zahl stets algebraisch unabhängig sind. In der vorliegenden Arbeit werden diese Untersuchungen weitergeführt und folgende zwei Sätze bewiesen:

Sind $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_N$ irgend N algebraische Zahlen, die linear unabhängig sind in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen, bedeutet ferner λ eine beliebige Liouville-Zahl, so sind die Zahlen

$$e^{\vartheta_1}, e^{\vartheta_2}, \ldots, e^{\vartheta_N}, \lambda$$

algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der algebraischen Zahlen.

Bedeutet z den reellen Logarithmus einer positiven rationalen und von Eins verschiedenen Zahl oder ist $z = \pi$, bedeutet ferner λ eine beliebige Liouville-Zahl, so sind die beiden Zahlen

$$z, \ \lambda$$

algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der algebraischen Zahlen.

Der Beweis dieser Sätze beruht auf einer Einteilung aller transzendenten Zahlen in drei Klassen nach ihrer Fähigkeit, sich durch algebraische Zahlen mehr oder weniger gut annähern zu lassen. Zwei Zahlen, die algebraisch von einander abhängen, gehören immer zur gleichen Klasse; also sind zwei Zahlen in verschiedenen Klassen gewiß algebraisch unabhängig. Diese Klasseneinteilung ist kurz in Kapitel Eins dargestellt.

Um dieselbe aber anwenden zu können, müssen schärfere Sätze abgeleitet werden über die Approximation der Werte der Exponentialfunktion und des Logarithmus in algebraischen Punkten durch algebraische Zahlen. Dazu wird von den entsprechenden algebraischen Fragen ausgegangen. Sind $\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_m$ voneinander verschiedene beliebige Zahlen, $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ beliebige natürliche Zahlen, so gibt es ein und nur ein System von Polynomen

$$A_k\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

bzw. vom Grad $\varrho_1 - 1, \varrho_2 - 1, \ldots, \varrho_m - 1$, so daß die Potenzreihe

$$R\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = \sum_{k=1}^{m} A_k\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) e^{\omega_k z} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l$$

genau mit dem Anfangsglied

$$\frac{z^{\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_m - 1}}{(\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_m - 1)!}$$

beginnt. Die Funktionen $A_k(z)$ und $R(z)$ lassen sich explizit durch Differentialausdrücke, vielfache reelle Integrale und einfache Cauchysche Integrale darstellen; es handelt sich bei ihnen um Ausartungen verallgemeinerter hypergeometrischer Funktionen. Wie ich neuerdings fand, finden sie sich bereits in einem Brief von Hermite an Pincherle (2) vor, jedoch ohne arithmetische Anwendungen. Diese Funktionen haben eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften; wird z. B. gesetzt

$$A_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m\\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) = A_k\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \ldots & \omega_h & \ldots \omega_m\\ \varrho_1 \ldots & \varrho_h+1 & \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, m),$$

so ist die Determinante

$$\left|A_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m\\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)\right| = c\,z^{\varrho_1+\cdots+\varrho_m} \qquad \left(\frac{dc}{dz} = 0,\ c \neq 0\right),$$

also nur im Nullpunkt gleich Null. Dieselben Funktionen stehen ferner, wie gezeigt wird, in einer merkwürdigen Beziehung zu den Polynomen, die Hermite bei seinem klassischen Transzendenzbeweis für e in der Arbeit (1) benutzt.

Die rein algebraischen Näherungen für die Exponentialfunktion

$$R\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m\\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) = \sum_{k=1}^{m} A_k\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m\\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_k z}$$

gehen in arithmetische über, wenn die Parameter gleich Zahlwerten gesetzt werden.

Zunächst sei m fest, während die Zahlen ϱ_k bis um eine Einheit den gleichen über alle Grenzen wachsenden Wert haben und $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ je gleich verschiedenen algebraischen Zahlen sind und $z = 1$. Nach einem Verfahren von Siegel (7) läßt sich aus den dann entstehenden numerischen Näherungen folgender Satz folgern:

Sind die N algebraischen Zahlen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_N$ linear unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen und gemeinsam in einem Zahlkörper vom Grad n gelegen, so gibt es eine positive Konstante $T_{N,n}$, die nur von N und n abhängt, so daß der Wert des Ausdruckes

$$\mathfrak{r} = \sum_{\lambda_1=0}^{M_1} \cdots \sum_{\lambda_N=0}^{M_N} \mathfrak{a}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}\, e^{\lambda_1\vartheta_1+\cdots+\lambda_N\vartheta_N}, \qquad a = \max_{\substack{\lambda_1=0,1,\ldots,M_1\\ \vdots\\ \lambda_N=0,1,\ldots,M_N}} (|\mathfrak{a}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}|) > 0$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten für genügend großes a der Ungleichung

$$|\mathfrak{r}| \geqq a^{-T_{N,n}M_1\cdots M_N}$$

genügt.

Hieraus läßt sich speziell die Aussage über Beziehungen zu Liouville-Zahlen herleiten. Im Fall $N = n = 1$ kann man noch genauere untere Schranken erhalten. Man kommt zu dem weiteren Ergebnis:

Die Koeffizienten der linearen Form in $1, e, \ldots, e^m$,

$$r = \sum_{k=0}^{m} a_k e^k, \qquad a = \max_{k=0,1,\ldots,m} (|a_k|) > 0$$

seien ganz rational. Dann gibt es eine positive Zahl c, die weder von m, noch von den Koeffizienten a_k abhängt, so daß für genügend großes a die folgende Ungleichung besteht:

$$|r| \geqq a^{-m-\frac{cm^2\log(m+1)}{\log\log a}}.$$

Dies Ergebnis ist eine geringe Verschärfung der bisher schärfsten Resultate von Siegel (7) und Popken (5) über die Annäherung an e.

Auf ähnliche Art kommt man zu Aussagen über die Annäherung an Logarithmen und insbesondere an die Zahl $2\pi i = \log 1$. Dazu wird in

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) = \sum_{k=1}^{m} A_k \left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_k z}$$

$\varrho_1 = \varrho_2 = \cdots = \varrho_m = \varrho$ festgehalten und m über alle Grenzen wachsen gelassen, während $\omega_k = k - 1$ ist und z gleich dem betreffenden Logarithmus. Dann ergibt sich die Existenz von unendlichvielen Annäherungen an z durch angebbare algebraische Zahlen vom Grad $\varrho - 1$, aus der die Angabe über Beziehungen zu Liouvilleschen Zahlen hergeleitet werden kann. Es läßt sich noch folgender Satz beweisen:

Es gibt eine absolute Konstante $c > 1$, so daß für eine beliebige natürliche Zahl m und $m + 1$ ganze rationale Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_m$ mit

$$a = \max_{k=0,1,\ldots,m} (|a_k|) \geqq a(m)$$

die Ungleichung

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_k \pi^k\right| \geqq a^{-c^m}$$

besteht.

Die Untersuchungen dieser Arbeit können auf die Binomialreihe übertragen werden; man erhält so für den Spezialfall der Wurzeln reiner Gleichungen einen neuen Beweis des Thue-Siegelschen Satzes.*) —

Herrn Prof. Siegel möchte ich an dieser Stelle danken für eine Reihe von Verbesserungsvorschlägen; er hatte die Güte, mich auf einige Irrtümer aufmerksam zu machen. Mein besonderer Dank gilt ferner der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft für ihre Unterstützung.

Literaturverzeichnis.

(1) Ch. Hermite, Sur la fonction exponentielle, Œuvres III, S. 150.

(2) Ch. Hermite, Sur la généralisation des fractions continues algébriques, Œuvres IV, S. 357.

(3) Laplace, Théorie analytique des probabilités, Œuvres VII, S. 111.

(4) Liouville, Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques, C. R. **18** (1844), S. 883 u. 910.

(5) K. Mahler, Über Beziehungen zwischen der Zahl e und den Liouvilleschen Zahlen, Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 729.

(6) J. Popken, Zur Transzendenz von e, Math. Zeitschr. **29** (1929), S. 525.
Zur Transzendenz von π, Math. Zeitschr. **29** (1929), S. 542.

(7) C. Siegel, Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, Abh. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1929, Nr. 1.

Außerdem sind die Arbeiten von Morduchai-Boltowskoj zu nennen, die mir aber ihrer Sprache wegen nicht zugängig waren.

I.

1. Bei Untersuchungen über transzendente Zahlen kann man oft von einer Klasseneinteilung der Zahlen nach ihrer Annäherungsschärfe Gebrauch machen, die hier kurz dargestellt ist.

Es bedeute z eine reelle oder nichtreelle Zahl, m und a zwei natürliche Zahlen. Die arithmetische Funktion

$$\omega_m(a \mid z) = \omega_m(a) = \min_{\substack{a_0, a_1, \ldots, a_m = 0, \mp 1, \ldots, \mp a \\ \sum_{k=0}^{m} a_k z^k \neq 0}} \left(\left|\sum_{k=0}^{m} a_k z^k\right|\right)$$

*) Dieser Beweis ist inzwischen erschienen in der Arbeit: „Ein Beweis des Thue-Siegelschen Satzes für binomische Gleichungen", Math. Annalen **105** (1931), S. 267.

ist höchstens gleich Eins und nimmt nicht zu, wenn m und a wachsen. Jeder der oberen Grenzwerte

$$\omega_m(z) = \omega_m = \overline{\lim_{a\to+\infty}} \frac{\log \frac{1}{\omega_m(a)}}{\log a}, \qquad \omega(z) = \omega = \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{\omega_m}{m}$$

ist entweder positiv unendlich groß oder eine endliche nichtnegative Zahl. Mit ω_m ist für $m' \geqq m$ auch $\omega_{m'}$ unendlichgroß; demnach gibt es einen Index $\mu(z) = \mu$, so daß ω_m für $m < \mu$ endlich, für $m \geqq \mu$ unendlich ist. Die beiden Zahlen ω und μ sind nie gleichzeitig endlich.

Definition: Eine Zahl z heißt

A-Zahl, wenn $\omega = 0, \quad \mu = +\infty$,
S-Zahl, wenn $0 < \omega < +\infty, \quad \mu = +\infty$,
T-Zahl, wenn $\omega = +\infty, \quad \mu = +\infty$,
U-Zahl, wenn $\omega = +\infty, \quad \mu < +\infty$

ist. Jede Zahl gehört einer und nur einer von diesen vier Klassen an.

2. Der Sinn der Klasseneinteilung ergibt sich aus einigen einfachen und altbekannten Hilfssätzen, deren Beweis auf Liouville und Dirichlet zurückgeht. Man hat mit der Abkürzung $\sigma(z) = \sigma = \begin{Bmatrix} 1 \text{ für reelles } z \\ 2 \text{ für nichtreelles } z \end{Bmatrix}$:

a) *Für eine algebraische Zahl z vom Grad n ist*

$$\frac{m+1}{\sigma} - 1 \leqq \omega_m \leqq \frac{n}{\sigma} - 1 \text{ für } m < n-1, \qquad \omega_m = \frac{n}{\sigma} - 1 \text{ für } m \geqq n-1;$$
$$\omega = 0, \quad \mu = +\infty;$$

b) *Für eine transzendente Zahl ist*

$$\omega_m \geqq \frac{m+1}{\sigma} - 1 \text{ für } m = 1, 2, 3, \ldots; \quad \omega \geqq \frac{1}{\sigma}.$$

Die Menge der A-Zahlen ist also identisch mit der Menge der algebraischen Zahlen, und man hat das Transzendenzkriterium:

Eine Zahl z ist dann und nur dann transzendent, wenn es zu jeder noch so großen Zahl $\Omega > 0$ eine natürliche Zahl m und unendlichviele Lösungen der Ungleichung

$$0 < \left| \sum_{k=0}^{m} a_k z^k \right| < a^{-\Omega}, \qquad a = \max_{k=0,1,\ldots,m} (|a_k|)$$

in ganzen rationalen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_m$ gibt.

Weiter gilt folgender Satz [1]):

c) *Wenn zwischen den beiden transzendenten Zahlen z_1 und z_2 eine algebraische Gleichung mit rationalen Koeffizienten, die nicht alle verschwinden, von der Form*

$$\sum_{\alpha_1=0}^{\mathfrak{a}_1} \sum_{\alpha_2=0}^{\mathfrak{a}_2} A_{\alpha_1\alpha_2} z^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} = 0$$

besteht, so ist

$$\omega_m(z_1) \leqq \mathfrak{a}_1 - 1 + \mathfrak{a}_1 \omega_{m\mathfrak{a}_2}(z_2), \qquad \omega_m(z_2) \leqq \mathfrak{a}_2 - 1 + \mathfrak{a}_2 \omega_{m\mathfrak{a}_1}(z_1)$$
$$\omega(z_1) \leqq \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \omega(z_2), \qquad \omega(z_2) \leqq \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \omega(z_1)$$
$$\mu(z_1) \leqq \mathfrak{a}_1 \mu(z_2), \qquad \mu(z_2) \leqq \mathfrak{a}_2 \mu(z_1).$$

Die Klasseneinteilung in A-Zahlen, S-Zahlen, T-Zahlen, U-Zahlen ist somit invariant bei dem Übergang von einer Zahl zu einer algebraisch abhängigen Zahl; zwei Zahlen in verschiedenen Klassen sind immer algebraisch unabhängig.

[1]) Siehe meine Note (5).

Offenbar sind die speziellen U-Zahlen mit $\mu = 1$ identisch mit den sogenannten Liouvilleschen Zahlen (4).

II.

3. Zu m natürlichen Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ und m voneinander verschiedenen komplexen Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ existieren nach bekannten Sätzen über homogene lineare Gleichungen m Polynome

$$A_k\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \ldots & \varrho_m \end{matrix} \right.\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

höchstens der Grade $\varrho_1 - 1, \varrho_2 - 1, \ldots, \varrho_m - 1$, die nicht alle gleichzeitig identisch verschwinden, so daß der Index h_0 des ersten nichtverschwindenden Koeffizienten a_{h_0} in der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{m} A_k\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m \end{matrix} \right.\right) e^{\omega_k z} = \sum_{h=0}^{\infty} a_h z^h$$

der Ungleichung

$$M = h_0 - \sum_{k=1}^{m} \varrho_k + 1 \geqq 0$$

genügt. Irgendeine der so bestimmten Summen werde bezeichnet mit

$$R\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = \sum_{k=1}^{m} A_k\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m \end{matrix} \right.\right) e^{\omega_k z}$$

und m ihre Ordnung, M ihr Überschuß genannt.

Bedeuten D, D^{-1}, J die Operatoren

$$D = \frac{d}{dz}, \; D^{-1} = \int \ldots dz, \; J = \int_0^z \ldots dz,$$

so gelten folgende Rechenregeln:

$$D^{\mp\varrho} e^{\omega z} A(z) = e^{\omega z} A_{\mp\varrho}(z), \qquad A_{\mp\varrho}(z) = (\omega + D)^{\mp\varrho} A(z) \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ist $A(z) \not\equiv 0$ ein Polynom und $\omega \neq 0$, so sind die Polynome $A_{+\varrho}(z)$ und $A_{-\varrho}(z)$ auch nicht identisch Null und von genau gleichem Grad wie $A(z)$.

Gemäß der Definition von $R\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m \end{matrix} \right.\right)$ sind die Polynome

$$A_k\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m \end{matrix} \right.\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

nicht alle gleichzeitig identisch Null; es möge etwa $A_H\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m \end{matrix} \right.\right) \not\equiv 0$ sein. Ist dann $h \neq H$, so wird

$$D^{\varrho_h} e^{-\omega_h z} R\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{m} A_k^*(z)\, e^{(\omega_k - \omega_h) z}$$

$$A_k^*(z) = (\omega_k - \omega_h + D)^{\varrho_h} A_k\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m \end{matrix} \right.\right) \qquad \left(\begin{matrix} k = 1, 2, \ldots, m \\ k \neq h \end{matrix}\right),$$

wobei die Polynome $A_k^*(z)$ höchstens vom Grad $\varrho_k - 1$ sind und dasjenige mit dem Index H nicht identisch verschwindet. Die Potenzreihe von $R\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m \end{matrix} \right.\right)$ begann aber mit der $(M + \sum_{k=1}^{m} \varrho_k - 1)$-ten Potenz von z, so daß die Potenzreihe der Funktion

$$D^{\varrho_h} e^{-\omega_h z} R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$$

mit der $(M + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{m} \varrho_k - 1)$-ten Potenz von z anfängt; letztere muß daher nach der obigen Definition gleich einer Funktion

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 - \omega_h & \dots & \omega_{h-1} - \omega_h & \omega_{h+1} - \omega_h & \dots & \omega_m - \omega_h \\ \varrho_1 & \dots & \varrho_{h-1} & \varrho_{h+1} & \dots & \varrho_m\end{matrix}\right)$$

der Ordnung $m - 1$ und des Überschusses M sein. Von einer Funktion $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ der Ordnung m und mit positivem Überschuß kann man daher stets zu einer Funktion der gleichen Art von der Ordnung $m - 1$ und von ebenfalls positivem Überschuß absteigen. Dieses Verfahren kann wiederholt werden, so daß aus der Existenz einer Funktion $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ beliebiger Ordnung und von positivem Überschuß die Existenz einer ebensolchen Funktion der Ordnung 1 mit positivem Überschuß folgt; eine solche existiert aber gewiß nicht.

Damit ist gezeigt:

Der Koeffizient der $(\sum_{k=1}^{m} \varrho_k - 1)$-ten *Potenz in der Potenzreihe jeder Funktion* $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ *ist ungleich Null.*

Hieraus lassen sich eine Reihe von Folgerungen ziehen. Offenbar besteht erstens der Satz:

Satz 1. *Seien* $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N$ *komplexe Zahlen, die in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen linear unabhängig sind. Dann sind die Funktionen*

$$z, e^{\vartheta_1 z}, e^{\vartheta_2 z}, \dots, e^{\vartheta_N z}$$

algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der komplexen Zahlen.

Zweitens folgt, daß die Funktion $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ *eindeutig* bestimmt ist, wenn verlangt wird, daß ihre Potenzreihe genau mit dem Gliede

$$\frac{z^{\varrho_1 + \dots + \varrho_m - 1}}{(\varrho_1 + \dots + \varrho_m - 1)!}$$

beginnt; diese Annahme werde von jetzt ab gemacht. Alsdann sind auch die Polynome $A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ eindeutig bestimmt, und zwar sind sie drittens alle nicht identisch Null, sondern vielmehr genau von den Graden $\varrho_1 - 1, \varrho_2 - 1, \dots, \varrho_m - 1$. Viertens folgt, daß die Funktion $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ in den Zahlpaaren

$$(\omega_1 \varrho_1), \quad (\omega_2 \varrho_2), \dots, (\omega_m \varrho_m)$$

symmetrisch ist.

4. Wegen der Eindeutigkeit und nach der Annahme über den ersten nichtverschwindenden Koeffizienten in den zugehörigen Potenzreihen ist

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \\ \varrho_1\end{matrix}\right) = \frac{z^{\varrho_1 - 1}}{(\varrho_1 - 1)!} e^{\omega_1 z},$$

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1\, \omega_2 \dots \omega_m \\ \varrho_1\, \varrho_2 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = e^{\omega_1 z} J^{\varrho_1} R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_2 - \omega_1 & \dots & \omega_m - \omega_1 \\ \varrho_2 & \dots & \varrho_m\end{matrix}\right)$$

und folglich

$$R\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_m\\ \varrho_1\ \varrho_2 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right.\right) = (e^{\omega_1 z} J^{\varrho_1})\,(e^{(\omega_2-\omega_1)z} J^{\varrho_2}) \ldots (e^{(\omega_{m-1}-\omega_{m-2})z} J^{\varrho_{m-1}})\, e^{(\omega_m-\omega_{m-1})z}\,\frac{z^{\varrho_m-1}}{(\varrho_m-1)!}$$

oder nach einer einfachen Umformung

$$R\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_m\\ \varrho_1\ \varrho_2 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right.\right) =$$

$$= \int_0^z dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{m-2}} dt_{m-1} \left\{ \frac{(z-t_1)^{\varrho_1-1}\,(t_1-t_2)^{\varrho_2-1} \ldots (t_{m-2}-t_{m-1})^{\varrho_{m-1}-1}\, t_{m-1}^{\varrho_m-1}}{(\varrho_1-1)!\,(\varrho_2-1)! \ldots (\varrho_{m-1}-1)!\,(\varrho_m-1)!} \times \right.$$

$$\left. \times\, e^{\omega_1(z-t_1)+\omega_2(t_1-t_2)+\cdots+\omega_{m-1}(t_{m-2}-t_{m-1})+\omega_m t_{m-1}} \right\}.$$

Damit sind die Funktionen $R\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_m\\ \varrho_1\ \varrho_2 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right.\right)$ explizit bestimmt.

5. Auch für die Polynome $A_k\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m\\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right.\right)$ kann eine explizite Formel angegeben werden, nämlich

$$A_k\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_m\\ \varrho_1\ \varrho_2 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right.\right) = \prod_{\substack{h=1\\ h\neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_h + D)^{-\varrho_h}\,\frac{z^{\varrho_k-1}}{(\varrho_k-1)!} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Denn für $m = 1$ stimmt diese Formel; sie sei bereits für alle Polynome

$$A_k\left(z\left|\begin{matrix}\omega_2-\omega_1 \ldots \omega_m-\omega_1\\ \varrho_2 \quad\ldots\quad \varrho_m\end{matrix}\right.\right)$$

mit $m-1$ Paaren $(\omega_k - \omega_1, \varrho_k)$ bewiesen. Wegen

$$R\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m\\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right.\right) = e^{\omega_1 z} J^{\varrho_1} R\left(z\left|\begin{matrix}\omega_2-\omega_1 \ldots \omega_m-\omega_1\\ \varrho_2 \quad\ldots\quad \varrho_m\end{matrix}\right.\right),$$

$$D^{-\varrho} e^{\omega z} A(z) = e^{\omega z}\cdot(\omega + D)^{-\varrho} A(z)$$

gilt sie dann auch für die Polynome $A_k\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m\\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right.\right)$ mit von 1 verschiedenem Index k; das Polynom $A_1\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m\\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right.\right)$, welches auf diese Art noch nicht bestimmt ist, muß dann nach der bewiesenen Symmetrie von $R\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m\\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right.\right)$ in den Zahlpaaren (ω_k, ϱ_k) gleichfalls die behauptete Form haben.

Der Differentialausdruck für $A_k\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m\\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right.\right)$ läßt sich in ein Cauchysches Integral überführen. Ist als Potenzreihe geschrieben

$$\prod_{\substack{h=1\\ h\neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_h + D)^{-\varrho_h} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l^{(k)} D^l,$$

so wird nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$c_l^{(k)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \prod_{\substack{h=1\\ h\neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_h + \mathfrak{z})^{-\varrho_h}\,\frac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}^{l+1}},$$

wobei über einen genügend kleinen Kreis C_0 um den Nullpunkt in positiver Richtung integriert wird. Wegen

$$A_k\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m\\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right.\right) = \sum_{l=0}^{\varrho_k-1} c_l^{(k)}\,\frac{z^{\varrho_k-l-1}}{(\varrho_k-l-1)!}$$

ist daher

$$A_k\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_0} \frac{e^{z\mathfrak{z}} - \sum\limits_{l=\varrho_k}^{\infty} \frac{(z\mathfrak{z})^l}{l!}}{\prod\limits_{\substack{h=1 \\ h \neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_h + \mathfrak{z})^{-\varrho_h} \mathfrak{z}^{\varrho_k}} d\mathfrak{z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_0} \frac{e^{z\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}}{\prod\limits_{h=1}^{m} (\omega_k - \omega_h + \mathfrak{z})^{\varrho_h}},$$

da die Funktion

$$\prod_{h=1}^{m} (\omega_k - \omega_h + \mathfrak{z})^{-\varrho_h} \sum_{l=\varrho_k}^{\infty} \frac{(z\mathfrak{z})^l}{l!}$$

im Nullpunkt regulär ist. Bedeutet C_k einen genügend kleinen Kreis mit positivem Richtungssinn um den Punkt ω_k, C_∞ einen genügend großen um den Nullpunkt mit positivem Richtungssinn, so wird folglich [2]):

$$e^{\omega_k z} A_k\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_k} \frac{e^{z\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}}{\prod\limits_{h=1}^{m} (\mathfrak{z} - \omega_h)^{\varrho_h}},$$

$$R\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\infty} \frac{e^{z\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}}{\prod\limits_{h=1}^{m} (\mathfrak{z} - \omega_h)^{\varrho_h}}.$$

Dem letzten Integral entnimmt man die Differentialgleichung

$$\prod_{h=1}^{m} (D - \omega_h)^{\varrho_h} R\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = 0,$$

und zwar ist $R\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right)$ die einzige Lösung dieser Differentialgleichung, die im Nullpunkt eine Potenzreihe mit dem Anfangsglied

$$\frac{z^{\varrho_1 + \dots + \varrho_m - 1}}{(\varrho_1 + \dots + \varrho_m - 1)!}$$

besitzt.

6. Wenn h und k Zahlen der Folge $1, 2, \dots, m$ sind und wie üblich

$$\delta_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{für } h = k \\ 0 & \text{für } h \neq k \end{cases}$$

ist, so werde gesetzt:

$$R_h\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = R\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 & \dots & \omega_m \\ \varrho_1 + \delta_{h1} & \dots & \varrho_m + \delta_{hm} \end{matrix} \right.\right),$$

$$A_{hk}\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = A_k\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 & \dots & \omega_m \\ \varrho_1 + \delta_{h1} & \dots & \varrho_m + \delta_{hm} \end{matrix} \right.\right).$$

Die quadratische Matrix

$$A\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = \left(A_{hk}\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right)\right) \qquad (h, k = 1, 2, \dots, m)$$

besitze die Determinante

$$D\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right),$$

[2]) Diese Formeln stehen bereits bei Hermite (2).

und durch Fortfall der h-ten Zeile und k-ten Spalte entstehe aus ihr die Unterdeterminante

$$D_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right).$$

Offenbar ist $A_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ ein Polynom in z vom Grad $\varrho_k + \delta_{hk} - 1$; der Koeffizient der höchsten Potenz von z ergibt sich aus der Darstellung als Differentialausdruck zu

$$\frac{1}{(\varrho_k + \delta_{hk} - 1)!}\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_l)^{-\varrho_l - \delta_{hl}}.$$

Die Determinante $D\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ ist folglich ein Polynom in z vom Grad $\varrho_1 + \cdots + \varrho_m$ mit dem Koeffizienten der höchsten Potenz gleich

$$\frac{1}{\varrho_1!\,\varrho_2!\ldots\varrho_m!}\prod_{k=1}^{m}\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_l)^{-\varrho_l}.$$

Aus den linearen Gleichungen in den Größen $e^{\omega_1 z}, e^{\omega_2 z}, \ldots, e^{\omega_m z}$

$$\sum_{k=1}^{m} A_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_k z} = R_h\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

folgt andrerseits durch Auflösung nach $e^{\omega_k z}$ die Identität:

$$D\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_k z} = \sum_{h=1}^{m} (-1)^{h+k} D_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) R_h\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right).$$

Also ist $D\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ durch die Potenz $z^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_m}$ teilbar, daher

$$D\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) = \frac{z^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_m}}{\varrho_1!\,\varrho_2!\ldots\varrho_m!}\prod_{k=1}^{m}\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_l)^{-\varrho_k}.$$

Wenn z nicht verschwindet, so ist demnach $D\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ nie gleich Null.

7. Die Matrix $A\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ besitzt als Funktion ihrer Argumente eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften. Werden z. B. die Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ gleichzeitig um Eins vermehrt, so multipliziert sie sich nur mit einer Matrix, deren Elemente rationale Funktionen in z von beschränktem Grade sind. Mittels einiger Formeln von Hermite gelingt es, wie wir zeigen wollen, auch die zu $A\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ reziproke Matrix zu bestimmen.

Es sei

$$F_h(\mathfrak{z}) = \prod_{l=1}^{m} (\mathfrak{z} - \omega_l)^{\varrho_l - \delta_{hl}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

und

$$\mathfrak{F}_h(z \mid \mathfrak{z}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} z^{-\lambda-1}\frac{d^\lambda F_h(\mathfrak{z})}{d\mathfrak{z}^\lambda} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

so daß identisch

$$\int F_h(\mathfrak{z})\, e^{-z\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z} = -\mathfrak{F}_h(z \mid \mathfrak{z})\, e^{-z\mathfrak{z}}$$

ist. Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} z^{\varrho_1+\cdots+\varrho_m}\mathfrak{F}_h(z\mid\omega_k) &= \mathfrak{A}_{hk}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right),\\ z^{\varrho_1+\cdots+\varrho_m}e^{(\omega_k+\omega_l)z}\int\limits_{\omega_k}^{\omega_l}F_h(\mathfrak{z})\,e^{-z\mathfrak{z}}\,d\mathfrak{z} &= R_{h,kl}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right).\end{aligned}\right\}\quad (h,k,l=1,2,\ldots,m)$$

Dann besteht die Identität

$$\mathfrak{A}_{hl}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right)e^{\omega_k z}-\mathfrak{A}_{hk}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right)e^{\omega_l z}=R_{h,kl}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right)\quad (h,k,l=1,2,\ldots,m).$$

Die Funktion $R_{h,kl}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right)$ besitzt in der Umgebung des Nullpunktes eine Potenzreihe, die erst mit der $(\varrho_1+\cdots+\varrho_m)$-ten Potenz von z beginnt. Die Funktionen $\mathfrak{A}_{hk}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right)$ sind Polynome in z genau vom Grad $(\varrho_1+\cdots+\varrho_m)+\delta_{hk}-\varrho_k-1$. Der Koeffizient der höchsten Potenz von z in $\mathfrak{A}_{hk}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right)$ ergibt sich leicht aus der Definition zu

$$(\varrho_k-\delta_{hk})!\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{m}(\omega_k-\omega_l)^{\varrho_l-\delta_{hl}}.$$

Mit $\mathfrak{A}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right)$ werde weiter die quadratische Matrix

$$\mathfrak{A}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right)=\left(\mathfrak{A}_{hk}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right)\right),$$

mit $\mathfrak{D}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right)$ ihre Determinante bezeichnet.

8. Offenbar ist $\mathfrak{D}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right)$ ein Polynom in z genau vom Grad

$$(m-1)\,(\varrho_1+\cdots+\varrho_m).$$

Da die Glieder in der Diagonale dieser Determinante jeweils von höherem Grade als die anderen Glieder in der gleichen Spalte sind, so ist folglich der Koeffizient der höchsten Potenz von z gleich

$$(\varrho_1-1)!\,(\varrho_2-1)!\ldots(\varrho_m-1)!\prod_{k=1}^{m}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{m}(\omega_k-\omega_l)^{\varrho_l},$$

d. h. gleich dem Produkt der entsprechenden Koeffizienten für die Diagonalglieder.

In der Determinante $\mathfrak{D}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right)$ werde jetzt für $\mathfrak{A}_{hk}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right)$ der Wert

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right)=e^{(\omega_k-\omega_1)z}\,\mathfrak{A}_{h1}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right)+e^{-\omega_1 z}R_{h,1k}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right)$$

eingesetzt und alsdann für $k=2,3,\ldots m$ von der k-ten Spalte die erste multipliziert mit $e^{(\omega_k-\omega_1)z}$ subtrahiert. Die Glieder in diesen Zeilen gehen dann alle über in Potenzreihen, die erst mit der Potenz $z^{\varrho_1+\cdots+\varrho_m}$ beginnen. Also ist $\mathfrak{D}\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right.\right)$ durch $z^{(m-1)(\varrho_1+\cdots+\varrho_m)}$ teilbar und die Formel von Hermite

$$\mathfrak{D}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) = (\varrho_1 - 1)!\,(\varrho_2 - 1)! \ldots (\varrho_m - 1)! \prod_{k=1}^{m} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_l)^{\varrho_l} \quad z^{(m-1)(\varrho_1 + \cdots + \varrho_m)}$$

bewiesen [3]).

9. Die vorige Identität ergibt sich auch aus einer Beziehung, die zwischen den beiden Matrizen $A\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ und $\mathfrak{A}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ besteht. Es ist

$$\sum_{l=1}^{m} A_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_l z} = R_h\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\mathfrak{A}_{k1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_l z} - \mathfrak{A}_{kl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_1 z} = R_{k,l1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) \quad (k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

und also

$$e^{\omega_1 z} \sum_{l=1}^{m} A_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) \mathfrak{A}_{kl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) =$$
$$= \mathfrak{A}_{k1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) R_h\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) - \sum_{l=1}^{m} A_{kl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) R_{k,l1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right).$$

Auf der rechten Seite dieser Identität stehen lauter Potenzreihen, die erst mit der $(\varrho_1 + \cdots + \varrho_m)$-ten Potenz von z beginnen. Die Ausdrücke links

$$\sum_{l=1}^{m} A_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) \mathfrak{A}_{kl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) = E_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$$

sind als Polynome also durch diese Potenz von z teilbar. Andrerseits ist das Polynom $A_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ vom Grad $\varrho_l + \delta_{hl} - 1$, das Polynom $\mathfrak{A}_{kl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ vom Grad $(\varrho_1 + \cdots + \varrho_m) + \delta_{kl} - \varrho_l - 1$. Folglich ist $E_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ ein Polynom vom Grad $(\varrho_1 + \cdots + \varrho_m) - 1$ für $h \neq k$ und vom Grad $(\varrho_1 + \cdots + \varrho_m)$ für $h = k$. Im ersten Fall ist es demnach identisch Null, im zweiten Fall aber identisch gleich einer Konstanten mal $z^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_m}$. Indem wir Gebrauch machen von den Koeffizienten der höchsten Potenzen von z in den Polynomen $A_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ und $\mathfrak{A}_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$, die früher bestimmt wurden, gelangen wir also zu den Formeln:

$$E_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varrho_h}\, z^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_m} & \text{für } h = k, \\ 0 & \text{für } h \neq k. \end{cases}$$

Diese m^2 Gleichungen lassen sich in die eine Matrizengleichung

$$A\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) \mathfrak{A}'\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) = z^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_m}\, \mathsf{P}(\varrho_1 \ldots \varrho_m)$$

zusammenfassen; dabei bedeutet der Akzent die transponierte Matrix und $\mathsf{P}(\varrho_1 \ldots \varrho_m)$ *die Diagonalmatrix*

[3]) Vgl. hierzu und zu den vorigen Formeln die Arbeit (1) von Hermite. Der Hermitesche Beweis benutzt die Zerlegung der Matrix $\mathfrak{A}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ in einfachere Faktoren.

$$\mathsf{P}(\varrho_1 \ldots \varrho_m) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varrho_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\varrho_m} \end{pmatrix}.$$

Durch Übergang zu den Determinanten folgt wieder die Hermitesche Identität; ferner ergibt sich, daß die Unterdeterminanten $D_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix}\right)$ von $A\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix}\right)$ bis auf von z unabhängige Faktoren gerade gleich den Polynomen $\mathfrak{A}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix}\right)$ sind.

Die vorige Matrizengleichung läßt sich als Verallgemeinerung einer bekannten Gammabeziehung auffassen. Man zeigt leicht, daß für $R(z) > 0$

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix}\right) = z^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_m} \int_0^\infty \prod_{l=1}^{m} (\mathfrak{z} + \omega_k - \omega_l)^{\varrho_l - \delta_{hl}} e^{-z\mathfrak{z}} \, dz$$

ist, wo über die positiv reelle Achse integriert wird. Also ist nach oben:

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{e^{z\mathfrak{z}} \, d\mathfrak{z}}{\prod_{l=1}^{m} (\mathfrak{z} + \omega_k - \omega_l)^{\varrho_l + \delta_{hl}}}\right)_{hk} \cdot \left(\int_0^\infty \prod_{l=1}^{m} (\mathfrak{z} + \omega_k - \omega_l)^{\varrho_l - \delta_{hl}} e^{-z\mathfrak{z}} \, d\mathfrak{z}\right)'_{hk} = \mathsf{P}(\varrho_1 \ldots \varrho_m),$$

und diese Matrizengleichung enthält im Fall $m = 1$ die Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{e^{z\mathfrak{z}}}{\mathfrak{z}^{\varrho+1}} \, d\mathfrak{z} \cdot \int_0^\infty \mathfrak{z}^{\varrho - 1} e^{-z\mathfrak{z}} \, d\mathfrak{z} = \frac{1}{\varrho},$$

die ein Spezialfall der Funktionalgleichung

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1 - s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

der Gammafunktion ist.

III.

10. Die Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ mögen alle in einem algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$ n-ten Grades liegen. Es sei $\varrho_1 = \varrho_2 = \cdots = \varrho_m = \varrho$ eine über alle Grenzen wachsende natürliche Zahl; mit $c_1, c_2, \ldots$ werden positive Konstanten bezeichnet, die von ϱ nicht abhängen.

Den Integralformeln in 4. entnimmt man die Ungleichung

$$R_h\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix}\right) = O\left(\frac{c_1^\varrho}{\varrho!^m}\right), \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Weiter ist nach der Differentialformel in 5.

$$A_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix}\right) = \left\{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} \left(\sum_{\lambda_l = 0}^{\infty} \binom{-\varrho - \delta_{hl}}{\lambda_l} (\omega_k - \omega_l)^{-\varrho - \delta_{hl} - \lambda_l} D^{\lambda_l}\right)\right\} \frac{z^{\varrho + \delta_{hk} - 1}}{(\varrho + \delta_{hk} - 1)!},$$

wobei die Summen nur bis zum Index ϱ erstreckt werden brauchen. Sei

$$\Omega = \prod_{\substack{h,k=1 \\ h<k}}^{m} (\omega_k - \omega_h).$$

Der Ausdruck

$$a_{hk}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix} = \Omega^{2\varrho+1}\,\varrho!\,A_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$$

ist alsdann ein Polynom in den Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ vom Grad $\dfrac{m(m-1)(2\varrho+1)}{2}$, dessen Koeffizienten ganze rationale Zahlen von der Größenordnung $O(c_2^\varrho\,\varrho!)$ sind.

Durch die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{m} a_{hk}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix} e^{\omega_k} = r_h\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix} \qquad (h = 1, 2, \dots, m)$$

mit

$$r_h\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix} = \Omega^{2\varrho+1}\,\varrho!\,R_h\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = O\left(\frac{c_3^\varrho}{\varrho!^{m-1}}\right)$$

sind m linear unabhängige Formen in den Zahlen e^{ω_k} gegeben. Seien

$$\sum_{k=1}^{m} \mathfrak{a}_{hk}\, e^{\omega_k} = \mathfrak{r}_h \qquad (h = 1, 2, \dots, \mu; \quad \mu < m)$$

μ unabhängige Linearformen in den e^{ω_k} mit ganzen rationalen Koeffizienten, für die

$$\max_{\substack{h=1,2,\dots,\mu \\ k=1,2,\dots,m}} (|\mathfrak{a}_{hk}|) = a, \qquad \max_{h=1,2,\dots,\mu} (|\mathfrak{r}_h|) = r$$

ist. Alsdann sind die μ Formen $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_\mu$ zusammen mit gewissen $m-\mu$ der Formen $r_h\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix}$, etwa den Formen

$$r_{h_1}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix}, \quad r_{h_2}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix}, \dots, r_{h_{m-\mu}}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix}$$

linear unabhängig. Die Determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{h_1 1}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix} & \dots & a_{h_1 m}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h_{m-\mu} 1}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix} & \dots & a_{h_{m-\mu} m}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix} \\ \mathfrak{a}_{11} & \dots & \mathfrak{a}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{a}_{\mu 1} & \dots & \mathfrak{a}_{\mu m} \end{vmatrix}$$

ist also von Null verschieden; sie ist offenbar ein Polynom in den Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ vom Grad $\dfrac{m(m-1)(m-\mu)(2\varrho+1)}{2}$ mit ganzen rationalen Koeffizienten von der Größenordnung $O(c_4^\varrho\,\varrho!^{m-\mu}\,a^\mu)$; demnach ist nach bekannten Sätzen

$$\frac{1}{\delta} = O(c_5^\varrho\,\varrho!^{(m-\mu)(n-1)}\,a^{(n-1)\mu}).$$

Sei die Unterdeterminante von δ zur l-ten Zeile und k-ten Spalte mit δ_{lk}^* bezeichnet; dann ist offenbar

$$\delta_{lk}^* = O(c_6^\varrho\,\varrho!^{m-\mu-1}\,a^\mu), \qquad \delta_{lk}^*\, r_{h_l}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix} = O(c_8^\varrho\,\varrho!^{-\mu}\,a^\mu) \qquad \text{für } 1 \leqq l \leqq m-\mu,$$

$$\delta_{lk}^* = O(c_7^\varrho\,\varrho!^{m-\mu}\,a^{\mu-1}), \qquad \delta_{lk}^*\,\mathfrak{r}_{l-m+\mu} = O(c_9^\varrho\,\varrho!^{m-\mu}\,a^{\mu-1} r) \quad \text{für } m-\mu+1 \leqq l \leqq m,$$

und wegen der Identität

$$\delta e^{\omega k} = \sum_{l=1}^{m-\mu} (-1)^{l+k}\, \delta_{lk}^{*}\, r_{hl} \begin{pmatrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{pmatrix} + \sum_{l=m-\mu+1}^{m} (-1)^{l+k}\, \delta_{lk}^{*}\, \mathfrak{r}_{l-m+\mu}$$

wird

$$1 = O(c_{10}^{\varrho}\, \varrho!^{m(n-1)-\mu n}\, a^{\mu n}) + O(c_{11}^{\varrho}\, \varrho!^{(m-\mu)n}\, a^{\mu n-1}\, r)$$

oder

$$c_{11}^{\varrho}\, \varrho!^{(m-\mu)n}\, a^{\mu n-1}\, r \geqq c_{12} - c_{13}\, c_{10}^{\varrho}\, \varrho!^{m(n-1)-\mu n}\, a^{\mu n}.$$

Wir machen jetzt die Annahme

$$\mu n > m(n-1) \qquad \text{d. h.} \quad \mu > m\left(1 - \frac{1}{n}\right);$$

ist a genügend groß, so gibt es dann immer eine größte Zahl ϱ, so daß

$$\frac{c_{12}}{2} \geqq c_{13}\, c_{10}^{\varrho}\, \varrho!^{m(n-1)-\mu n}\, a^{\mu n}$$

wird; daraus ergibt sich die asymptotische Gleichung

$$\log \varrho! \sim \frac{\mu n}{\mu n - m(n-1)} \log a$$

und folglich

$$r \geqq a^{-\tau-\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{für} \quad a \geqq a_0(\varepsilon)$$

mit dem Exponenten [4])

$$\tau = \mu n - 1 + \frac{(m-\mu)\mu n^2}{\mu n - m(n-1)} = \frac{m \mu n}{\mu n - m(n-1)} - 1.$$

11. Seien $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N$ N algebraische Zahlen im Zahlkörper $\mathfrak{K}$ n-ten Grades, die linear unabhängig sind in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen, $M_1, M_2, \dots, M_N$ und $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ je N natürliche Zahlen; die Koeffizienten des Ausdrucks

$$\mathfrak{r} = \sum_{\lambda_1=0}^{M_1} \dots \sum_{\lambda_N=0}^{M_N} \mathfrak{a}_{\lambda_1 \dots \lambda_N}\, e^{\lambda_1 \vartheta_1 + \dots + \lambda_N \vartheta_N}; \quad a = \max_{\substack{\lambda_1 = 0, 1, \dots, M_1 \\ \vdots \\ \lambda_N = 0, 1, \dots, M_N}} (|\mathfrak{a}_{\lambda_1 \dots \lambda_N}|) > 0$$

seien ganz rational. Die Linearformen

$$\mathfrak{r}_{\lambda_1 \dots \lambda_N} = e^{\lambda_1 \vartheta_1 + \dots + \lambda_N \vartheta_N}\, \mathfrak{r} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 = 0, 1, \dots, \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_N = 0, 1, \dots, \mu_N \end{pmatrix}$$

von der Anzahl

$$\mu = (\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1) \dots (\mu_N + 1)$$

in den Ausdrücken

$$e^{\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_N}}, \quad \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_N} = \lambda_1 \vartheta_1 + \dots + \lambda_N \vartheta_N \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 = 0, 1, \dots, M_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_N = 0, 1, \dots, M_N + \mu_N \end{pmatrix}$$

der Anzahl

$$m = (M_1 + \mu_1 + 1)(M_2 + \mu_2 + 1) \dots (M_N + \mu_N + 1)$$

---

[4]) Siehe wegen des Beweisverfahrens in 10. die Arbeit von Siegel (7).

sind offenbar linear unabhängig, und jeder der Quotienten

$$\left|\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}}\right|$$

liegt zwischen positiven endlichen Schranken, die von den Zahlen $\mathfrak{a}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}$ nicht abhängen. Für $\varepsilon > 0$ und $a \geqq a(\varepsilon)$ besteht also die Ungleichung

$$|\mathfrak{r}| \geqq a^{-\tau-\varepsilon}$$

mit

$$\tau = \frac{n(M_1+\mu_1+1)\ldots(M_N+\mu_N+1)\,(\mu_1+1)\ldots(\mu_N+1)}{n(\mu_1+1)\ldots(\mu_N+1)-(n-1)\,(M_1+\mu_1+1)\ldots(M_N+\mu_N+1)} - 1,$$

wenn

$$n(\mu_1+1)\ldots(\mu_N+1)-(n-1)\,(M_1+\mu_1+1)\ldots(M_N+\mu_N+1) > 0$$

ist. Diese Ungleichung kann durch die Annahmen

$$\mu_l = \left[\frac{M_l}{\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{1/N}-1}\right]$$

erfüllt werden, denn dann ist

$$1+\frac{M_l}{\mu_l+1} \leqq \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{\frac{1}{N}},$$

also

$$1-\frac{n-1}{n}\prod_{l=1}^{N}\left(1+\frac{M_l}{\mu_l+1}\right) \geqq 1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2n}{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$$

und

$$\frac{\prod_{l=1}^{N}\left(1+\frac{M_l}{\mu_l+1}\right)}{1-\frac{n-1}{n}\prod_{l=1}^{N}\left(1+\frac{M_l}{\mu_l+1}\right)} \leqq 2n,$$

so daß

$$\tau \leqq 2n\,(\mu_1+1)\ldots(\mu_N+1)-1 \leqq 2n\prod_{l=1}^{N}\left(\left[\frac{M_l}{\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{1/N}-1}\right]+1\right)-1$$

wird. Für $N=1$ kann die eckige Klammer fortgelassen werden, so daß dann

$$\tau \leqq 2n(2n-1)\,M_1+(2n-1)$$

ist. Damit ist bewiesen:

Satz 2. *Seien $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_N$ N algebraische Zahlen eines Zahlkörpers $\mathfrak{K}$ n-ten Grades, die linear unabhängig sind in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen. Sind dann $M_1, M_2, \ldots, M_N$ irgend N natürliche Zahlen und die Koeffizienten der Linearform*

$$\mathfrak{r} = \sum_{\lambda_1=0}^{M_1}\cdots\sum_{\lambda_N=0}^{M_N}\mathfrak{a}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}\,e^{\lambda_1\vartheta_1+\cdots+\lambda_N\vartheta_N},\quad a = \max_{\substack{\lambda_1=0,1,\ldots,M_1\\ \vdots\\ \lambda_N=0,1,\ldots,M_N}}(|\mathfrak{a}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}|)$$

in den Zahlen

$$e^{\lambda_1\vartheta_1+\cdots+\lambda_N\vartheta_N}$$

ganz rational, so besteht für genügend großes a die Ungleichung

$$|\mathfrak{r}| \geqq a^{-T_{N,n} M_1 \ldots M_N}$$

mit einer positiven Zahl $T_{N,n}$, die allein von n und N abhängt. Die Zahlen

$$e^{\vartheta_1}, e^{\vartheta_2}, \ldots, e^{\vartheta_N}$$

sind also algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der algebraischen Zahlen. Für $N = 1$ ist speziell, unter Beachtung der früheren Definition

$$\omega_m(e^{\vartheta_1}) \leqq 2n(2n-1)\, m + (2n-1), \qquad \omega(e^{\vartheta_1}) \leqq 2n(2n-1),$$

also e^{ϑ_1} eine S-Zahl. Allgemeiner folgt leicht aus den eben gezeigten unteren Abschätzungen für $\mathfrak{r}$, daß jede von den Zahlen

$$e^{\vartheta_1}, e^{\vartheta_2}, \ldots, e^{\vartheta_N}$$

algebraisch abhängige Zahl entweder eine A-Zahl oder eine S-Zahl oder eine T-Zahl ist. *Unter U eine beliebige U-Zahl, z. B. eine Liouvillesche Zahl λ verstanden, sind also die Zahlen*

$$e^{\vartheta_1}, e^{\vartheta_2}, \ldots, e^{\vartheta_N}, U$$

stets algebraisch unabhängig.

12. Das letzte Ergebnis enthält die Aussage, daß die Zahl e eine S-Zahl ist. Bei Benutzung der Hermiteschen Formeln kann man zu einem schärferen Resultat gelangen.

Es werde wieder $\varrho_0 = \varrho_1 = \cdots = \varrho_m = \varrho$ als große natürliche Zahl angenommen und dann

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \mathfrak{A}_{h+1,\,k+1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} 0\ 1 \ldots m \\ \varrho\ \varrho \ldots \varrho \end{matrix}\right),$$

$$R_{hkl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = R_{h+1,\,k+1,\,l+1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} 0\ 1 \ldots m \\ \varrho\ \varrho \ldots \varrho \end{matrix}\right)$$

gesetzt, so daß

$$\mathfrak{A}_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) e^{kz} - \mathfrak{A}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) e^{lz} = R_{hkl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

ist. Wegen

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} z^{(m+1)\varrho-\lambda-1} \left.\frac{d^\lambda F_h(\mathfrak{z})}{d\mathfrak{z}^\lambda}\right|_{\mathfrak{z}=k}, \qquad F_h(\mathfrak{z}) = \prod_{l=0}^{m} (\mathfrak{z} - l)^{\varrho-\delta_{hl}}$$

ist klar, daß die Polynome $\mathfrak{A}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ lauter ganze rationale Koeffizienten mit dem gemeinsamen Teiler

$$(\varrho - 1)!$$

besitzen. Die Zahlen $\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ sind also gleichfalls durch $(\varrho - 1)!$ teilbar.

Es ist als Integral geschrieben:

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \int_0^\infty \prod_{l=0}^{m} (\mathfrak{z} + k - l)^{\varrho-\delta_{hl}}\, e^{-\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z},$$

$$R_{hkl}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = e^{k+l} \int_k^l \prod_{l=0}^{m} (\mathfrak{z} - l)^{\varrho-\delta_{hl}}\, e^{-\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}.$$

Wenn ϱ über alle Grenzen wächst, so ergeben sich hieraus mittels der Methode von Laplace leicht asymptotische Formeln [1]).

[1]) Siehe (1), S. 157 und (3).

Im Integral für $\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \middle| \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ wird das asymptotische Verhalten durch das Verhalten des Integranden bei $\mathfrak{z} \sim (m+1)\varrho$ bestimmt. Hier ist aber

$$\prod_{l=0}^{m} (\mathfrak{z} + k - l)^{\varrho - \delta_{hl}} = \mathfrak{z}^{(m+1)\varrho - 1} \prod_{l=0}^{m} \left(1 + \frac{(k-l)\varrho}{\mathfrak{z} \cdot \varrho}\right)^{\varrho - \delta_{hl}} \sim \mathfrak{z}^{(m+1)\varrho - 1} e^{\frac{\varrho}{z} \sum\limits_{l=0}^{m} (k-l)} \sim \mathfrak{z}^{(m+1)\varrho - 1} e^{k - \frac{m}{2}},$$

und durch einfache Abschätzungen zeigt man

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \middle| \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \sim e^{k - \frac{m}{2}} \Gamma((m+1)\varrho) \sim e^{k - \frac{m}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{(m+1)\varrho}} (m+1)^{(m+1)\varrho} \varrho^{(m+1)\varrho} e^{-(m+1)\varrho}$$

und erst recht

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \middle| \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho}} (m+1)^{(m+1)\varrho} \varrho^{(m+1)\varrho} e^{-(m+1)\varrho}\right).$$

Bedeute weiter ζ_λ die Wurzel der Gleichung

$$\sum_{l=0}^{m} \frac{1}{\mathfrak{z} - l} = 0$$

im Intervall $(\lambda - 1, \lambda)$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, m$ und sei

$$\tau_\lambda = \prod_{l=0}^{m} (\zeta_\lambda - l), \qquad \sigma_\lambda = \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{(\zeta_\lambda - l)^2}.$$

Das Integral

$$\int_{\lambda-1}^{\lambda} \prod_{l=0}^{m} (\mathfrak{z} - l)^{\varrho - \delta_{hl}} e^{-\mathfrak{z}} \, d\mathfrak{z}$$

wird für großes ϱ nach der Laplaceschen Methode asymptotisch gleich

$$\frac{e^{-\zeta_\lambda}}{\zeta_\lambda - h} \sqrt{\frac{2\pi}{\varrho \sigma_\lambda}} \tau_\lambda^{\varrho},$$

während sich die Funktionen $R_{hkl}\left(A \middle| \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ additiv aus mehreren dieser Integrale zusammensetzen. Sei

$$\tau = \max_{\lambda = 1, 2, \ldots, m} (|\tau_\lambda|).$$

Dann ist also

$$R_{hkl}\left(1 \middle| \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = O\left(\frac{\tau^\varrho}{\sqrt{\varrho}}\right).$$

Für großes m ist τ leicht abzuschätzen. Man hat

$$|\tau_\lambda| = (\lambda - \zeta)(\lambda - 1 - \zeta) \ldots (1 - \zeta) \cdot \zeta(\zeta + 1) \ldots (\zeta + m - \lambda) \leqq \lambda! \, (m - \lambda + 1)! = \frac{(m+1)!}{\binom{m+1}{\lambda}},$$

und da $\binom{m+1}{\lambda}$ um so kleiner ist, je kleiner $|m + 1 - 2\lambda|$, so ist

$$0 < \tau \leqq \frac{(m+1)!}{\binom{m+1}{1}} = m!.$$

Man hat also erst recht:

$$R_{hkl}\left(1 \middle| \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = O\left(\frac{m!^\varrho}{\sqrt{\varrho}}\right).$$

13. Seien jetzt $a_0, a_1, \ldots a_m$ m ganze rationale Zahlen und das Maximum ihres absoluten Betrages

$$a = \max_{k=0,1,\ldots,m} (|a_k|)$$

von Null verschieden und sehr groß. In dem Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{m} a_k e^k = r$$

können die Werte e^k eliminiert werden mittels der Formeln

$$\mathfrak{A}_{h0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) e^k = \mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) + R_{hk0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \qquad (h, k = 0, 1, \ldots, m),$$

so daß

$$\mathfrak{A}_{h0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) r = \sum_{k=0}^{m} a_k \, \mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) + \sum_{k=0}^{m} a_k \, R_{hk0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \qquad (h = 0, 1, \ldots, m)$$

ist. Die Determinante

$$\left| \mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)_{h,k=0,1,\ldots,m} \right|$$

ist nach der Hermiteschen Formel von Null verschieden; die Linearformen

$$L_h = \sum_{k=0}^{m} a_k \, \mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \qquad (h = 0, 1, \ldots, m)$$

in $a_0, a_1, \ldots, a_m$ können also nicht gleichzeitig verschwinden. Sei etwa L_{h_0} von Null verschieden. Dieser Ausdruck ist dann eine durch $(\varrho - 1)!$ teilbare ganze rationale Zahl, da alle Koeffizienten $\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ es sind; also wird

$$|L_{h_0}| \geqq (\varrho - 1)! \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\varrho}} \, \varrho^\varrho e^{-\varrho}.$$

Seien wieder $c_1, c_2, \ldots$ positive, wohl von m, nicht aber von a und ϱ abhängige Zahlen. Man hat nach den Formeln in 12.

$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_k R_{h_0 k 0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \right| \leqq c_1 a \frac{m!^\varrho}{\sqrt{\varrho}}, \quad \left| \mathfrak{A}_{h_0 0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \right| \leqq \frac{c_2}{\sqrt{\varrho}} (m+1)^{(m+1)\varrho} \varrho^{(m+1)\varrho} e^{-(m+1)\varrho},$$

also

$$\frac{c_2}{\sqrt{\varrho}} (m+1)^{(m+1)\varrho} \varrho^{(m+1)\varrho} e^{-(m+1)\varrho} |r| \geqq \frac{c_3}{\sqrt{\varrho}} \varrho^\varrho e^{-\varrho} - c_1 a \frac{m!^\varrho}{\sqrt{\varrho}}$$

und

$$|r| \geqq \frac{c_3 \varrho^\varrho e^{-\varrho} - c_1 a \, m!^\varrho}{c_2 (m+1)^{(m+1)\varrho} \varrho^{(m+1)\varrho} e^{-(m+1)\varrho}}.$$

Jetzt werde ϱ gewählt als die größte natürliche Zahl, die der Ungleichung

$$c_3 (\varrho - 1)^{\varrho - 1} e^{-(\varrho - 1)} \leqq 2 c_1 a \, m!^{\varrho - 1}$$

genügt. Dann ist gewiß

$$\varrho \log \varrho = \log a + \varrho \log (m! \, e) + O(\log \varrho)$$

und

$$\varrho \sim \frac{\log a}{\log \log a}.$$

Es wird also

$$\log|r| \geqq (\varrho\log\varrho - \varrho + O(1)) - \left\{(m+1)\,\varrho\log\varrho - (m+1)\,\varrho\log\frac{m+1}{e} + O(1)\right\}$$

oder

$$\log|r| \geqq -m\log a - \left\{m\log(m!\,e) - (m+1)\log\frac{m+1}{e} + 1\right\}\frac{\log a}{\log\log a}\big((1+o(1)\big).$$

Also ist für $\varepsilon > 0$ und $a > a(\varepsilon)$

$$|r| \geqq a^{-m-\frac{\lambda+\varepsilon}{\log\log a}},$$

und zwar besitzt λ den Wert

$$\lambda = m\log(m!\,e) - (m+1)\log\frac{m+1}{e} + 1 = m^2\log m + O(m^2).$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 3. *Die Koeffizienten der Linearform*

$$r = a_0 + a_1 e + \cdots + a_m e^m, \quad a = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, (a_m|)$$

seien ganz rationale Zahlen, die nicht gleichzeitig verschwinden. Dann gibt es eine positive Zahl c, die weder von m, noch von den Koeffizienten der Form r abhängt, so daß für $a \geqq a(m)$ die Ungleichung

$$|r| \geqq a^{-m-\frac{cm^2\log(m+1)}{\log\log a}}$$

besteht [1]).

Speziell ist also nach den Definitionen und Hilfssätzen in 1. und 2. die Gleichung

$$\omega(e) = 1$$

erfüllt, so daß die arithmetische Funktion ω für die reelle Zahl e den kleinsten überhaupt möglichen Wert Eins annimmt. Es ist allgemeiner auch

$$\omega(e^z) = 1,$$

wo z irgendeine rationale Zahl bedeutet. Dagegen gilt

$$\omega(ie^z) = \frac{1}{2},$$

so daß für nichtreelle Zahlen der Mindestwert 1/2 von ω ebenfalls erreicht wird.

[1]) Siehe die Arbeiten von Siegel (7), S. 31 und von Popken (6).

Eingegangen 5. Januar 1931.