

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DAVID HILBERT

IN GÖTTINGEN

UNTER MITWIRKUNG VON

OTTO BLUMENTHAL

IN AACHEN

ERICH HECKE

IN HAMBURG

Sonderabdruck aus Band 106, Heft 1.

Kurt Mahler

Über das Maß der Menge aller S -Zahlen.



BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1932

Über das Maß der Menge aller S -Zahlen.

Von

Kurt Mahler in Göttingen.

Bei Untersuchungen über transzendente Zahlen wird man zu dem Begriff der S -Zahlen geführt¹⁾; man versteht hierunter transzendente Zahlen x , für die jeder Ausdruck

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \quad (a = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_m|) \geq 1)$$

beliebigen Grades in x mit ganzen rationalen Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_m der Ungleichung

$$|a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m| \geq \Gamma(m) a^{-\gamma m}$$

genügt, wobei $\gamma > 0$ nur von x , $\Gamma(m) > 0$ nur von x und m abhängt.

In Verallgemeinerung des bekannten Satzes, daß die Menge aller Liouvilleschen Zahlen das Maß Null besitzt, werden in dieser Note folgende beiden Sätze nachgewiesen²⁾:

„Das Linienmaß der Menge aller Punkte auf der reellen Achse, die keine S -Zahlen sind, ist gleich Null.“

¹⁾ Siehe die Arbeiten:

J. Popken, Zur Transzendenz von e , Math. Zeitschr. 29, S. 525.

K. Mahler, Über Beziehungen zwischen der Zahl e und Liouvilleschen Zahlen, Math. Zeitschr. 31, S. 729.

K. Mahler, Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, Journal f. d. r. u. ang. Mathematik (im Druck).

In der ersten Arbeit wird gezeigt, daß e eine S -Zahl ist, in der dritten, daß auch e^z für algebraisches $z \neq 0$ eine S -Zahl ist. In der zweiten Arbeit wird bewiesen, daß zwei transzendente Zahlen s und t , zwischen denen eine algebraische Beziehung mit algebraischen Koeffizienten $\sum_{h=0}^m \sum_{k=0}^n A_{hk} s^h t^k = 0$ besteht, entweder zugleich S -Zahlen sind oder zugleich keine S -Zahlen.

²⁾ In der Arbeit: „Zwei Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Perron“, Math. Zeitschr. 22, S. 274–284, beweist Herr A. Khintchine den verwandten, aber tieferen Satz, daß die Menge aller reellen S -Zahlen mit $\gamma = 1$ das Maß Null besitzt.

„Das Flächenmaß der Menge aller Punkte in der komplexen Zahlenebene, die keine S -Zahlen sind, ist Null.“

Beim Beweis wird davon ausgegangen, daß ein Polynom $f(x)$ vom Grad $m \geq 2$ mit ganzen rationalen Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_m und lauter einfachen Nullstellen für $|x| \leq 3a$ der Ungleichung

$$|f(x)| + |f'(x)| \geq \frac{1}{m \cdot 3^{m-1} (2m-2)! m^m a^{3m-4}}$$

$$(a = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_m|) \geq 1)$$

genügt, wie man wegen des Nichtverschwindens der Diskriminante zeigt. Hieraus erhält man eine obere Schranke für das Maß der reellen oder der komplexen Punkte, die einer Ungleichung

$$|f(x)| \leq \mu a^{-4m}$$

mit konstantem $\mu > 0$ genügen; aus diesen Abschätzungen kann man leicht die Behauptung ableiten.

1. Das Polynom m -ten Grades

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \quad (a_m \neq 0, m \geq 2)$$

besitze ganze rationale Koeffizienten mit

$$a = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_m|) \geq 1$$

und lauter voneinander verschiedene Nullstellen. Seine Diskriminante

$$d = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & & & a_0 & a_1 & \dots & a_m \\ a_m & a_1 & 2a_2 & \dots & ma_m & & \\ & & & & & & \\ & & & & a_1 & 2a_2 & \dots & ma_m \end{vmatrix}$$

ist daher von Null verschieden, als ganze rationale Zahl also mindestens vom Absolutbetrag Eins. Setzt man

$$F_0(x) = \frac{1}{a_m} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ x & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^{m-2} & \dots & a_0 & & a_1 & \dots & a_m \\ 0 & 2a_2 & 3a_3 & \dots & ma_m & & \\ 0 & a_1 & 2a_2 & \dots & (m-1)a_{m-1} & ma_m & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & \dots & & a_1 & 2a_2 & \dots & ma_m \end{vmatrix};$$

$$F_1(x) = \frac{1}{a_m} \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_0 & a_1 & \dots & a_m \\ 1 & 2a_2 & 3a_3 & \dots & ma_m \\ x & a_1 & 2a_2 & \dots & (m-1)a_{m-1} & ma_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^{m-1} & \dots & a_1 & 2a_2 & \dots & ma_m \end{vmatrix},$$

so besteht die Identität

$$f(x)F_0(x) + f'(x)F_1(x) = d.$$

Das Polynom $F_0(x)$ ist vom Grad $m-2$, das Polynom $F_1(x)$ vom Grad $m-1$ in x ; die Koeffizienten der beiden Polynome sind absolut höchstens gleich

$$c_0(m)a^{2m-3} \quad \text{mit} \quad c_0(m) = (2m-2)! m^m,$$

wie eine triviale Abschätzung zeigt.

Wird $|x| \leq 3a$ angenommen, so bestehen daher die Ungleichungen

$$|F_0(x)| \leq c_0(m)a^{2m-3} \cdot (m-1)(3a)^{m-2} < c_0(m)a^{2m-3} \cdot m(3a)^{m-1};$$

$$|F_1(x)| \leq c_0(m)a^{2m-3} \cdot m(3a)^{m-1},$$

und man erhält aus der vorigen Identität die Beziehung

$$|f(x)| + |f'(x)| \geq 2c_1(m)a^{-(3m-4)}$$

mit

$$c_1(m) = \frac{1}{2m \cdot 3^{m-1} c_0(m)} = \frac{1}{2m \cdot 3^{m-1} (2m-2)! m^m}.$$

2. Sei μ ein echter Bruch mit $\mu \leq c_1(m)$ und die Ungleichung

$$|f(x)| \leq \mu a^{-(3m-4)}, \quad \text{d. h. erst recht} \quad |f(x)| \leq 1$$

erfüllt. Wegen $a_m \neq 0$ ist dann

$$|x^m| \leq 1 + a(1 + |x| + \dots + |x^{m-1}|) \leq 2a \frac{|x|^m - 1}{|x| - 1}.$$

Diese Ungleichung verlangt, daß entweder

$$|x| \leq 1$$

oder

$$|x| - 1 \leq 2a \frac{|x|^m - 1}{|x|^m} < 2a$$

ist. Auf jeden Fall ist daher

$$|x| \leq 3a.$$

Man darf folglich die obige Ungleichung zwischen $f(x)$ und $f'(x)$ anwenden und gelangt zum

Hilfssatz 1. Wenn das Polynom $f(x)$ der Ungleichung

$$|f(x)| \leq \mu a^{-(3m-4)} \quad (0 \leq \mu \leq \min(1, c_1(m)) = c_1(m))$$

genügt, so befriedigt seine Ableitung $f'(x)$ die Ungleichung

$$|f'(x)| \geq c_1(m) a^{-(3m-4)}.$$

3. Sei zunächst x reell angenommen. Die Menge der Punkte x auf der reellen Achse, für die

$$|f(x)| \leq \mu a^{-4m}, \quad \text{d. h. erst recht} \quad |f(x)| \leq \mu a^{-(3m-4)}$$

ist, werde mit $M(f)$ bezeichnet. Nach dem vorigen Hilfssatz ist in $M(f)$

$$|f'(x)| \geq c_1(m) a^{-(3m-4)}.$$

Offenbar setzt sich $M(f)$ aus endlichvielen getrennt liegenden Intervallen zusammen. In jedem dieser Intervalle genügt $f'(x)$ als stetige Funktion von x entweder überall der Ungleichung

$$f'(x) \geq +c_1(m) a^{-(3m-4)}$$

oder überall der Ungleichung

$$f'(x) \leq -c_1(m) a^{-(3m-4)}.$$

In einem beliebigen Teilintervall von $M(f)$ ist demnach $f(x)$ monoton wachsend oder monoton abnehmend; sind x_1 und x_2 seine beiden Endpunkte, so ist folglich seine Länge nach oben begrenzt durch

$$|x_1 - x_2| \leq \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{c_1(m) a^{-(3m-4)}}.$$

In $M(f)$ kann aber offenbar $f(x)$ jeden Wert des Intervalls

$$(-\mu a^{-4m}, +\mu a^{-4m})$$

höchstens m -mal annehmen; die Gesamtlänge von $M(f)$ muß demnach der Ungleichung

$$|M(f)| \leq \frac{2m\mu a^{-4m}}{c_1(m) a^{-(3m-4)}} = c_2(m) \mu a^{-m-4}$$

mit

$$c_2(m) = 4m^2 3^{m-1} m^m (2m-2)!$$

genügen. Der Beweis setzte $m \geq 2$ voraus; für $m = 1$ ist dagegen offenbar

$$|M(f)| \leq 2\mu a^{-4} \leq c_2(1) \mu a^{-4}.$$

Faßt man beide Ungleichungen zusammen, so erhält man den

Hilfssatz 2. Die Punktmenge $M(f)$ auf der reellen Achse, in der

das Polynom $f(x)$ der Ungleichung

$$|f(x)| \leq \mu a^{-4m} \quad (0 \leq \mu \leq c_1(m))$$

genügt, besitzt eine Gesamtlänge

$$|M(f)| \leq c_2(m) \mu a^{-(m+3)}.$$

4. Sei zu der festen natürlichen Zahl m die positive Zahl $\mu \leq c_1(m)$ beliebig, aber fest gewählt. $f(x)$ durchlaufe alle Polynome von genau m -tem Grade mit ganzen rationalen Koeffizienten und lauter einfachen Nullstellen. Zu jedem dieser unendlichvielen Polynome gehört eine Punktmenge $M(f)$; die Vereinigungsmenge aller $M(f)$ werde mit $M_m(\mu)$ bezeichnet. Offenbar setzt sich $M_m(\mu)$ aus abzählbar vielen getrennt liegenden Intervallen zusammen. Es gibt zu jeder natürlichen Zahl a höchstens

$$(2a+1)^{m+1} \leq 3^{m+1} a^{m+1}$$

„erlaubte“ Polynome; also folgt aus Hilfssatz 2, daß der Gesamtinhalt von $M_m(\mu)$ höchstens gleich

$$|M_m(\mu)| \leq \sum_{a=1}^{\infty} 3^{m+1} a^{m+1} \cdot c_2(m) \mu a^{-(m+3)} = 3^{m+1} \zeta(2) c_2(m) \mu$$

ist:

Hilfssatz 3. *Der Inhalt der Punktmenge $M_m(\mu)$ genügt für $\mu \leq c_1(m)$ der Ungleichung*

$$|M_m(\mu)| \leq c_3(m) \mu \quad (c_3(m) = 4 \zeta(2) m^2 3^{2m} m^m (2m-2)!).$$

5. Sei $f(x)$ jetzt ein beliebiges Polynom genau m -ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten. Dann existiert eine Zerlegung

$$f(x) = \prod_{l=1}^q f_l(x),$$

wobei

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x)$$

q Polynome in x etwa von den Graden

$$m_1, m_2, \dots, m_q, \quad \sum_{l=1}^q m_l = m,$$

mit lauter einfachen Nullstellen sind; ihre Koeffizienten dürfen ohne Einschränkung ganz rational angenommen werden. Bedeutet $a^{(l)}$ das Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten von $f_l(x)$, so ist nach einem Hilfssatz von C. Siegel³⁾

$$a^{(l)} \leq \frac{m!}{m_l!} a.$$

³⁾ Siehe die Arbeit: „Approximation algebraischer Zahlen“ von C. Siegel, Math. Zeitschr. **10**, S. 176.

Sei jetzt in einem beliebigen Punkt x die Ungleichung

$$|f(x)| \leq \mu a^{-4m}$$

erfüllt. Es ist klar, daß dann mindestens eine der Ungleichungen

$$|f_l(x)| \leq \mu^{\frac{m_l}{m}} a^{-4m_l} \leq \mu_l a^{(l)-4m_l} \quad (l = 1, 2, \dots, q)$$

erfüllt ist, wobei

$$\mu_l = \mu^{\frac{m_l}{m}} \left(\frac{m!}{m_l!} \right)^{4m_l}$$

gesetzt ist. Diese Ungleichungen sind gerade von der bisher betrachteten Form; die früheren Ergebnisse dürfen angewandt werden, wenn

$$\mu_l \leq c_1(m_l) \quad (l = 1, 2, \dots, q)$$

ist. Diese Ungleichung ist gewiß erfüllt, wenn die m Ungleichungen

$$\mu \leq \left(\frac{k!}{m!} \right)^{4m} c_1(k)^{\frac{m}{k}} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

zugleich bestehen; nach dem Wert von $c_1(k)$

$$c_1(k) = \frac{1}{2k 3^{k-1} (2k-2)! k^k}$$

hat die rechte Seite dieser Ungleichung offenbar den kleinsten Wert für $k = 1$, so daß die Annahme

$$\mu \leq c_4(m) \quad \left(c_4(m) = \frac{1}{2^m m!^{4m}} \right)$$

alle Bedingungen erfüllt.

Wenn

$$|f_l(x)| \leq \mu_l a^{(l)-4m_l}$$

ist, so gehört der Punkt x nach den früheren Definitionen zur Menge $M_{m_l}(\mu_l)$ also zu einer der m Mengen

$$M_k \left(\mu^{\frac{k}{m}} \left(\frac{m!}{k!} \right)^{4k} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

also erst recht zu ihrer Vereinigungsmenge, die mit $N_m(\mu)$ bezeichnet sei. Aus Hilfssatz 3 folgt, daß der Gesamthalt von $N_m(\mu)$ höchstens gleich

$$|N_m(\mu)| \leq \sum_{k=1}^m c_3(k) \left(\frac{m!}{k!} \right)^{4k} \mu^{\frac{k}{m}}$$

ist. Es werde

$$\mu = c_4(m) \varepsilon^m$$

gesetzt; die Zahl ε genügt dann der Bedingung

$$0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

Dann geht die Ungleichung für $N_m(\mu)$ über in

$$|N_m(\mu)| \leq \sum_{k=1}^m c_3(k) \left(\frac{m!}{k!}\right)^{4k} c_4(m)^{\frac{k}{m}} \varepsilon^k$$

und erst recht

$$|N_m(\mu)| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_3(k)}{2^k k!^{4k}},$$

da die Reihe

$$c_5 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_3(k)}{2^k k!^{4k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \zeta(2) k^2 3^{2k} k^k (2k-2)!}{2^k k!^{4k}}$$

konvergiert.

Damit ist folgender Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 4. $f(x) \not\equiv 0$ durchlaufe alle Polynome m -ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten. Die Menge aller reellen Punkte x , in denen eine der unendlichvielen Ungleichungen

$$|f(x)| \leq c_4(m) \varepsilon^m a^{-4m} \quad (0 \leq \varepsilon \leq 1)$$

erfüllt ist, setzt sich aus abzählbar vielen getrennt liegenden Intervallen zusammen, deren Gesamtlänge kleiner als

$$c_5 \varepsilon$$

ist.

6. Der vorige Hilfssatz führt zu einer allgemeinen Aussage über die Häufigkeit der S-Zahlen.

Es durchlaufe $f(x) \not\equiv 0$ alle Polynome beliebigen Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten; ε sei ein positiver echter Bruch und $N(\varepsilon)$ gleich der Menge aller reellen x , in denen irgendeine der unendlichvielen Ungleichungen

$$|f(x)| \leq \frac{c_4(m)}{m^{2m}} \varepsilon^m a^{-4m}$$

besteht. Demnach ist $N(\varepsilon)$ die Vereinigungsmenge aller Mengen

$$N_m \left(\frac{c_4(m)}{m^{2m}} \varepsilon^m \right) \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

und setzt sich daher aus abzählbar vielen getrennt liegenden Intervallen zusammen, deren Gesamthalt nach Hilfssatz 4 höchstens gleich

$$\sum_1^{\infty} c_5 \frac{\varepsilon}{m^2} = c_5 \zeta(2) \varepsilon$$

ist.

Die Komplementärmenge zu $N(\varepsilon)$ in der Menge aller reellen x enthält nach der Definition der S-Zahlen offenbar abgesehen von höchstens

abzählbar vielen algebraischen Zahlen nur S -Zahlen, und zwar mit $\gamma \leq 4$. Da für genügend kleines ε die Menge $N(\varepsilon)$ einen beliebig kleinen Gesamtinhalt besitzt, erst recht also die Menge aller Zahlen in $N(\varepsilon)$, die keine S -Zahlen sind, so ist damit folgender Satz bewiesen.

Satz 1. *Das Maß aller reellen Zahlen, die keine S -Zahlen sind, ist gleich Null.*

Allgemeiner folgt, daß „fast jede“ reelle Zahl S -Zahl mit $\gamma \leq 4$ ist. Vermutlich kann diese Schranke bis auf jede Zahl oberhalb Eins herabgedrückt werden.

7. Der vorige Satz besitzt ein Analogon im Gebiete der komplexen Zahlen.

Es sei wieder $f(x)$ ein Polynom genau m -ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten ohne mehrfache Nullstellen, und mit $M(f)$ werde diesmal die Menge aller *reellen und komplexen* Zahlen verstanden, die der Ungleichung

$$|f(x)| \leq \mu a^{-4m}$$

genügen. Nach Hilfssatz 1 ist wieder in $M(f)$

$$|f'(x)| \geq c_1(m) a^{-(3m-4)}.$$

Die neue Punktmenge $M(f)$ setzt sich offenbar aus endlichvielen Flächenstücken in der komplexen Ebene zusammen, deren Rand von endlichvielen analytischen Kurvenbögen gebildet wird. Die zu $f(x)$ inverse Funktion $g(y)$ bildet den m -mal überdeckten Kreis

$$|y| \leq \mu a^{-4m}$$

in der y -Ebene, d. h. eine Punktmenge vom Inhalt

$$m \cdot \pi \mu^2 a^{-8m}$$

konform, aber nicht notwendig schlicht, ab auf $M(f)$. Nach der Lehre von der konformen Abbildung besteht aber folgende Beziehung:

„Sei durch $y = f(x)$ ein infinitesimales Flächenstück F_x in der x -Ebene um den Punkt x herum konform auf ein infinitesimales Flächenstück F_y in der y -Ebene abgebildet; dann gilt für ihre Flächeninhalte

$$\frac{F_x}{F_y} = |f'(x)|^{-2}.$$

Indem man diese Beziehung integriert und beachtet, daß in $M(f)$

$$|f'(x)|^{-1} \leq c_1(m)^{-1} a^{3m-4}$$

ist, ergibt sich für den Inhalt dieser Punktmenge die obere Schranke

$$|M(f)| \leq c_1(m)^{-2} a^{6m-8} \cdot m \pi \mu^2 a^{-8m} = c_6(m) \mu^2 a^{-(2m+8)}.$$

Auch diese Ungleichung ist wieder nur für $m \geq 2$ erfüllt; für $m = 1$ hat man

$$|M(f)| \leq \pi \mu^2 a^{-8}.$$

Man kommt somit zu einem ganz analogen Ergebnis wie Hilfssatz 2; von hier aus lassen sich aber alle früheren Ableitungen offensichtlich fast ohne Änderung übertragen. Somit gilt auch folgender Satz:

Satz 2. Das Flächenmaß aller reellen oder komplexen Zahlen x , die keine S-Zahlen sind, ist gleich Null.

Wahrscheinlich sind sogar „fast alle“ reellen oder komplexen Zahlen S-Zahlen mit $\gamma \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$, wo ε irgendeine positive Konstante bedeutet.

Krefeld, den 16. April 1931.

(Eingegangen am 24. 4. 1931.)