Neuer Beweis eines Satzes von A. Khintchine

Kurt Mahler (Groningen)

Seien $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ n reelle Zahlen, β eine nichtnegative und μ eine positive Zahl, ferner $y_0, y_1, \ldots, y_n$ $n+1$ ganze rationale Zahlen, die nicht alle gleich Null sind und den Ungleichungen

$$y = \max(|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_n|) > \mu^{\frac{1}{n+\beta}}, \quad 0 < \left|\sum_{k=1}^{n} y_k\theta_k + y_0\right| \leqslant \frac{\mu}{y^{n+\beta}} < 1 \tag{1}$$

genügen.

Nach dem Minkowskischen Linearformensatz gibt es $n+1$ ganze rationale Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_n$, die nicht alle verschwinden und für die

$$|x_0y_0 + x_1y_1 + \ldots + x_ny_n| < 1, \tag{2}$$

$$|x_0\theta_k - x_k| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} y_k\theta_k + y_0\right|^{\frac{1}{n}} < 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

ist; denn die Linearformen auf den linken Seiten dieser Ungleichungen haben die Determinante

$$(-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\theta_k + y_0\right) \neq 0.$$

Es muss sogar $x_0 \neq 0$ sein; denn sonst folgte aus den Ungleichungen (3), dass alle x gleich Null wären.

Weil die linke Seite von (2) ganz rational ist, so gilt ferner

$$x_0y_0 + x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = 0,$$

also die Gleichung

$$x_0\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\theta_k + y_0\right) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x_0\theta_k - x_k), \tag{4}$$

daher wegen (3) die Ungleichung

$$|x_0| \leqslant ny\left|\sum_{k=1}^{n} y_k\theta_k + y_0\right|^{\frac{1}{n}-1}.$$

Da nach (1)

$$y \leqslant \mu^{\frac{1}{n+\beta}}\left|\sum_{k=1}^{n} y_k\theta_k + y_0\right|^{\frac{1}{n+\beta}}$$

ist, so folgt somit

$$|x_0| \leqslant n\mu^{\frac{1}{n+\beta}} \left| \sum_{k=1}^{n} y_k\theta_k + y_0 \right|^{\frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n+\beta}},$$

oder wegen $\frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n+\beta} = -\frac{n^2+(n-1)\beta}{n(n+\beta)}$:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} y_k\theta_k + y_0 \right| \leqslant n^{\frac{n(n+\beta)}{n^2+(n-1)\beta}} \mu^{\frac{n}{n^2+(n-1)\beta}} |x_0|^{-\frac{n(n+\beta)}{n^2+(n-1)\beta}}.$$

Wird dies in (3) eingesetzt, so folgt also schliesslich:

$$|x_0\theta_k - x_k| \leqslant n^{\frac{1+\beta^*}{n}} \mu^{\frac{\beta^*}{\beta}} |x_0|^{-\frac{1+\beta^*}{n}} \text{ mit } \beta^* = \frac{\beta}{n^2+(n-1)\beta} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Gehen wir nicht von einer einzelnen Lösung von (1) aus, sondern kennen wir unendlich viele verschiedene solche Lösungen, für die folglich y über alle Grenzen wachsen wird, so müssen die hierzu konstruierbaren linken Seiten von (3), die wegen $x_0 \neq 0$ und (1) und (4) nicht alle Null sind, gegen Null streben; folglich wächst auch x_0 über alle Grenzen, und es gibt unter diesen Voraussetzungen auch unendlich viele verschiedene Lösungen von (5).

Damit haben wir die zweite Hälfte des Khintchineschen Übertragungssatzes auf rein arithmetischem Wege bewiesen. Der ursprüngliche Khintchinesche Beweis benutzt das Schubfachprinzip und macht von geometrischen Überlegungen Gebrauch. Siehe dazu die beiden Arbeiten: „Zwei Bemerkungen zu einer Arbeit des Herrn Perron", „Math. Zeitschrift", **22**, (1925), 274—284, und „Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen", „Rend. Palermo", **50**, (1926), 170—195.

Der Beweis dieser Note lässt sich ohne Mühe so umändern, dass er zu einem analogen Ergebnis im Gebiete der p-adischen Zahlen führt.

Groningen, 18/III 1936.

(Поступило в редакцию 14/X 1936 г.)

Новое доказательство одной теоремы А. Я. Хинчина

Курт Малер (Гронинген)

(Резюме)

В настоящей заметке дается новое, значительно более простое доказательство одной теоремы Хинчина о линейных диофантовых приближениях.
