EIN P-ADISCHES ANALOGON ZU EINEM SATZ VON TCHEBYCHEFF.

VON KURT MAHLER, in Manchester.

Sind ϑ und θ zwei reelle Zahlen, von denen die erste irrational ist, so lassen sich nach einem Satz von *Tchebycheff* [1]) die Ungleichungen

$$|x - \vartheta y - \theta| \leq \frac{1}{2t}, \quad |x| \leq t$$

stets für gewisse beliebig grosse Zahlen $t \geqq 1$ in ganzen rationalen Zahlen x, y lösen. In der vorliegenden Note wird ein ähnliches Ergebnis für P-adische Zahlen, wo P eine willkürliche natürliche Primzahl ist, bewiesen [2]):

1) Oeuvres, t. I, 637—684. Vgl. Ch. Hermite, Oeuvres III, 513.

2) Eine Einführung in die Theorie der P-adischen Zahlen findet der Leser z.B. in Kap I—III der Dissertation von H. Turkstra, Metrische Bijdragen tot de Theorie der Diophantische Approximaties in het Lichaam der P-adische Getallen (Diss. V. U. Amsterdam), Groningen 1936.

Satz 1: *Seien ϑ und θ zwei ganze P-adische Zahlen, von denen die erste irrational ist. Es gibt eine positive Zahl μ, die nur von P und nicht von ϑ und θ abhängt, derart, dass das Ungleichungssystem*

$$|x - \vartheta y - \theta|_{\mathrm{P}} \leq \frac{\mu}{t^2}, \quad \max(|x|, |y|) \leq t$$

für gewisse beliebig grosse Werte von $t \geqq 1$ in ganzen rationalen Zahlen x und y lösbar ist.

Wie der Beweis zeigt, kann man auch einen zulässigen Wert für μ angeben; dagegen ist es mir nicht geglückt, den bestmöglichen Wert hierfür zu bestimmen oder auch nur zu zeigen, dass $\mu \leq 1$ sein darf.

1. Sei ϑ eine ganze p-adische Irrationalzahl. In einer Arbeit über P-adische Kettenbrüche [3]) zeigte ich u.a., dass es zu ϑ eine unendliche Folge (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3), ... von Paaren ganzer rationaler Zahlen p_n und q_n gibt, so dass, wenn

$$|p_n, q_n| = \max(|p_n|, |q_n|)$$

gesetzt wird, die Ungleichungen

$$0 < |p_1, q_1| < |p_2, q_2| < |p_3, q_3| < \ldots,$$

$$\frac{1}{2\,|p_n, q_n|\,|p_{n+1}, q_{n+1}|} \leq |p_n - q_n \vartheta|_{\mathrm{P}} < \frac{\sqrt{\mathrm{P}}}{|p_n, q_n|\,|p_{n+1}, q_{n+1}|}$$

gelten und ferner der grösste gemeinsame Teiler von p_n und q_n für jedes n eine reine Potenz von p darstellt.

Seien nun x und y zwei ganze rationale Zahlen mit

$$|x, y| = \max(|x|, |y|) > 0$$

und werde angenommen, dass für ein geeignetes n

$$|x - y\vartheta|_{\mathrm{P}} \leq |p_n - q_n \vartheta|_{\mathrm{P}}$$

ist. Dann wird

$$|xq_n - yp_n|_{\mathrm{P}} = |q_n(x - y\vartheta) - y(p_n - q_n\vartheta)|_{\mathrm{P}} \leq |p_n - q_n\vartheta|_{\mathrm{P}} <$$

$$< \frac{\sqrt{\mathrm{P}}}{|p_n, q_n|\,|p_{n+1}, q_{n+1}|},$$

ferner

$$|xq_n - yp_n| \leq 2\,|x, y|\,|p_n, q_n|.$$

Wenn die Determinante $\mathrm{D} = xq_n - yp_n$ nicht verschwindet, so muss also

3) Nieuw Arch. Wisk. (2) **18**, 22—34.

$$|D||D|_P \geqq 1, \quad \text{d.h.} \quad |x, y| > \frac{|p_{n+1}, q_{n+1}|}{2\sqrt{P}}$$

sein. Ist D dagegen Null, so muss offenbar

$$x = gp_n, \quad y = gq_n$$

sein, wo $g \neq 0$ eine ganze rationale Zahl darstellt; wegen

$$|x, y||x - \vartheta y|_P = |g||g|_P |p_n, q_n||p_n - q_n\vartheta|_P, \; |g||g|_P \geq 1$$

ergibt sich demnach in diesem Fall, dass

$$|x, y||x - \vartheta y|_P \geq \frac{1}{2|p_{n+1}, q_{n+1}|}$$

ist.

2. Aus den vorigen Abschätzungen ergibt sich der folgende Satz:

Satz 2: *Zu jeder ganzen P-adischen Irrationalzahl ϑ gibt es beliebig grosse Zahlen $t \geqq 1$, so dass das Ungleichungssystem*

$$|x, y||x - \vartheta y|_P < \frac{1}{4\sqrt{P}\,t}, \; 1 \leq |x, y| \leq t$$

unlösbar in ganzen rationalen Zahlen x, y ist.

Beweis: Für t werde der Zahlwert

$$t = \frac{|p_{n+1}, q_{n+1}|}{2\sqrt{P}}$$

genommen, wo n einen beliebig grossen Index bezeichnet. Ist alsdann

$$|x - \vartheta y|_P \leq |p_n - q_n\vartheta|_P,$$

so muss nach 1. die Determinante D verschwinden und

$$|x, y||x - \vartheta y|_P \geq \frac{1}{2|p_{n+1}, q_{n+1}|} = \frac{1}{4\sqrt{P}\,t}$$

sein. Dieselbe Abschätzung gilt auch noch für

$$|x - \vartheta y|_P > |p_n - q_n\vartheta|_P,$$

wenn $D = 0$ ist. Ist dagegen $D \neq 0$, so wird in diesem Fall $\{2|x, y||p_n, q_n|\}^{-1} \leqq |D|_P =$

$$= |q_n(x - \vartheta y) - y(p_n - \vartheta q_n)|_P \leqq |x - \vartheta y|_P$$

und also

$$|x, y||x - \vartheta y|_P \geqq \frac{1}{2|p_n, q_n|} > \frac{1}{4\sqrt{P}\,t},$$

so dass auch dann die Behauptung folgt.

3. *L. J. Mordell* hat eine einfache Methode angegeben [4]), um aus der Unlösbarkeit homogener Ungleichungssysteme auf die Lösbarkeit der zugehörigen inhomogenen Ungleichungssysteme zu schliessen; dabei wird vom *Minkowskischen* Linearformensatz Gebrauch gemacht. Dieser besitzt ein Analogon im P-adischen, wie ich in einer früheren Note [5]) zeigte; dasselbe ermöglicht es, die Mordellsche Methode folgendermassen zum Beweis von Satz 1 der Einleitung zu benutzen:

Wir setzen

$$k = [P^2 \,.\, 4\sqrt{P}]!$$

und schreiben k in der Form $k = rs$, wo r eine reine Potenz von P, s aber zu P teilerfremd ist. Nach Satz 2, angewandt mit $r\vartheta$ statt ϑ, gibt es beliebig grosse Zahlen $t \geqq 1$, für die das Ungleichungssystem

$$\text{(a)}: \qquad |x' - r\vartheta y'|_P < \frac{1}{4\sqrt{P}t^2}, \quad 0 < |x', y'| \leq t$$

unlösbar in ganzen rationalen Zahlen x', y' ist. Nach dem P-adischen Analogon zum Minkowskischen Satz gibt es andrerseits drei ganze rationale Zahlen x', y', z, die nicht sämtlich verschwinden, mit

$$\text{(b)}: \left| x' - r\vartheta y' - \frac{\theta z}{s} \right|_P < \frac{1}{4\sqrt{P}t^2}, \, |x', y'| \leq t, \, |z| \leq P^2 \,.\, 4\sqrt{P}.$$

Offenbar kann nicht $z = 0$ sein, denn dann wären x' und y' nicht beide Null und also (a) lösbar, was nicht sein kann. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann demnach z positiv angenommen werden; sei $z = RS$, wo R eine reine Potenz von P, S aber zu P teilerfremd ist. Aus der oberen Schranke für z geht hervor, dass R ein Teiler von r und s ein Teiler von s ist. Wir setzen

$$x = \frac{s}{z} x', \qquad y = \frac{rs}{z} y'$$

und haben also

$$|x, y| \leq kt,$$

$$|x - \vartheta y - \theta|_P = |z|_P^{-1} \left| x' - r\vartheta y' - \frac{\theta z}{s} \right|_P < \frac{r}{4\sqrt{P}t^2} \leq \frac{k}{4\sqrt{P}t^2}.$$

Ist t schon genügend gross, so folgt aus (b), dass x' durch

4) Journal London Math. Soc. **12**, 166—167.

5) Jber. Deutsch. Math. Vereinig. **44**, 250—255; siehe auch die Arbeit von Turkstra.

R teilbar und demnach x eine ganze rationale Zahl ist. Wird noch

$$\mathrm{T} = kt, \qquad \mu = \frac{k^3}{4\sqrt{\mathrm{P}}}$$

gesetzt, so ist also damit bewiesen, dass das Ungleichungssystem

$$\left| x - \vartheta y - \theta \right|_{\mathrm{P}} < \frac{\mu}{\mathrm{T}^2}, \ \left| x, y \right| \leq \mathrm{T}$$

für geeignete beliebig grosse Werte von $\mathrm{T} \geq 1$ ganze rationale Lösungen x, y hat, w.z.b.w.