Über einen Satz von Th. Schneider.

Von

Kurt Mahler (Manchester).

Vor etwa drei Jahren zeigte Th. Schneider folgenden wichtigen Satz: „Zu der reellen algebraischen Zahl ζ gebe es unendlichviele verschiedene gekürzte Brüche

$$\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2},\ \frac{p_3}{q_3},\ \ldots \qquad (2 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant q_3 \leqslant \ldots)$$

mit

$$\left|\frac{p_\lambda}{q_\lambda} - \zeta\right| \leqslant q_\lambda^{-\mu},$$

wo $\mu > 2$ konstant ist. Dann ist

$$\overline{\lim_{\lambda \to \infty}}\ \frac{\log\, q_{\lambda+1}}{\log\, q_\lambda} = \infty.$$

Der Schneidersche Beweis (Journal reine u. angew. Math. 175, 1936) ist ziemlich umständlich und kann wesentlich vereinfacht werden; dies war nach einer brieflichen Mitteilung Herrn Schneider bereits vor mir bekannt. In der vorliegenden Note (die ich schon vor zwei Jahren schrieb) gebe ich *meinen* vereinfachten Beweis und zwar zugleich für den allgemeineren Fall, dass man gleichzeitig die Annäherungen endlichvieler algebraischen Zahlen betrachtet.

§ 1. Die Existenzannahme.

Seien $\zeta_1,\ \zeta_2, \ldots,\ \zeta_N$ beliebige N reelle algebraische Zahlen, ferner $\mu > 2$ eine Konstante, (1): $$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots \qquad (2 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant q_3 \leqslant \ldots)$$

eine nach wachsenden Nennern angeordnete unendliche Folge verschiedener gekürzter Brüche mit positivem Nenner, derart, dass zu jedem dieser Brüche $\frac{p_\lambda}{q_\lambda}$ ein Index $\nu = \nu(\lambda)$ mit $1 \leqslant \nu \leqslant N$ und

(2): $$\left| \frac{p_\lambda}{q_\lambda} - \zeta_\nu \right| \leqslant q_\lambda^{-\mu}$$

gehört. **Wir werden zeigen, dass alsdann**

$$\overline{\lim_{\lambda \to \infty}} \; \frac{\log q_{\lambda+1}}{\log q_\lambda} = \infty$$

ist. Der Beweis ist indirekt. Wir nehmen an, dass der vorige Grenzwert endlich ist, dass es also eine natürliche Zahl $c > 1$ gibt, so dass für alle λ

$$\frac{\log q_{\lambda+1}}{\log q_\lambda} \leqslant c \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, oder mit anderen Worten, dass zu jedem genügend grossen positiven s ein Bruch $\frac{p_\lambda}{q_\lambda}$ mit

(3): $$s \leqslant \log q_\lambda \leqslant cs$$

existiert. **Hieraus wird sich weiterhin ein Widerspruch ergeben.**

§ 2. Konstruktion von Näherungssystemen.

Im Folgenden sind k und r_k zwei natürliche Zahlen und $\varepsilon < \frac{1}{2}$ eine positive Zahl, die wir alle drei fest annehmen, über die aber erst später genauer verfügt wird.

Zu jeder genügend grossen natürlichen Zahl s können wir nach § 1 k Näherungsbrüche

$$z_\varkappa^{(s)} = \frac{p_\varkappa^{(s)}}{q_\varkappa^{(s)}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

aus der Folge (1) mit

(4): $$s r_k^{-3^{k-\varkappa}} < \log q_\varkappa^{(s)} \leqq c s r_k^{-3^{k-\varkappa}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

und folglich erst recht mit

(5): $$\frac{1}{c} r_k^{3^{k-\varkappa}} \leqslant r_k \frac{\log q_k^{(s)}}{\log q_\varkappa^{(s)}} \leqslant c r_k^{3^{k-\varkappa}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

angeben. Zu diesen k Brüchen gibt es alsdann k Indizes

$$\nu_1^{(s)}, \ \nu_2^{(s)}, \ \ldots, \nu_k^{(s)}$$

zwischen 1 und N, derart, dass gemäss (2)

(6): $$\left| \frac{p_\varkappa^{(s)}}{q_\varkappa^{(s)}} - \zeta_{\nu_\varkappa^{(s)}} \right| \leqslant q_\varkappa^{(s)-\mu} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

ist. Das geordnete Indexsystem $(\nu_1^{(s)}, \nu_2^{(s)}, \ldots, \nu_k^{(s)})$ hat nur N^k Möglichkeiten; man kann demnach eine unendliche Folge $\mathfrak{H}^*$ wachsender natürlicher Zahlen s finden, für die die Glieder dieses Systems feste Werte

$$\nu_\varkappa^{(s)} = \nu_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

haben, die von s nicht abhängen. Somit ist für alle s aus $\mathfrak{H}^*$:

(7): $$\left| \frac{p_\varkappa^{(s)}}{q_\varkappa^{(s)}} - \eta_\varkappa \right| \leqslant q_\varkappa^{(s)-\mu} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k),$$

wenn zur Abkürzung

(8): $$\zeta_{\nu_\varkappa} = \eta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

gesetzt wird. Natürlich brauchen die Zahlen $\eta_\varkappa$ nicht alle von einander verschieden zu sein [1]).

Aus der Folge $\mathfrak{H}^*$ wählen wir schliesslich eine unendliche Teilfolge $\mathfrak{H}$ wachsender s-Werte aus, für die die k Grenzwerte

$$\lim_{\substack{s \to \infty \\ s \text{ in } \mathfrak{H}}} r_k \frac{\log q_k^{(s)}}{\log q_\varkappa^{(s)}} = \rho_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

gleichzeitig existieren; dies ist wegen (5) gewiss möglich. Setzen wir nun

$$[\rho_\varkappa] = r_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots k),$$

nehmen wir ferner an, dass r_k grösser als eine gewisse nur von ε abhängige

---

[1]) Im Schneiderschen Fall $N = 1$ ist die Auswahl der Indizes $\nu_\varkappa^{(s)}$ natürlich überflüssig, und man kann sofort das Ungleichungssystem (7) und zwar mit

$$\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_k = \zeta_1$$

hinschreiben.

positive Schranke $P_0(\varepsilon)$ ist, so wird jetzt offenbar für alle genügend grossen s aus $\mathfrak{H}$

$$(9): \qquad \frac{r_\varkappa}{1+\varepsilon} \leqslant r_k \frac{\log\ q_k^{(s)}}{\log\ q_\varkappa^{(s)}} \leqslant \frac{r_k}{1-\varepsilon} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Man hat ferner ebenfalls wegen (5) für $r_k > P_1(\varepsilon, c)$:

$$r_1 \geqslant (r_2+1)^2, \ r_2 \geqslant (r_3+1)^2, \ldots, r_{k-2} \geqslant (r_{k-1}+1)^2, \ r_{k-1} \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\,(r_k+1)$$

und demnach

$$(10): \qquad \varepsilon\, r_\varkappa \geqslant \prod_{\lambda=\varkappa+1}^{k} (r_\lambda + 1) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1).$$

§ 3. Konstruktion des Näherungspolynoms.

Es gilt nach Schneider [2]):

„Seien $k, r_1, r_2, \ldots, r_k$ natürliche Zahlen, $\varepsilon < \frac{1}{2}$ eine positive Zahl, $H = \prod_{\varkappa=1}^{k} (r_\varkappa + 1)$, und H_ε die Anzahl der Systeme nichtnegativer ganzer rationaler Zahlen $h_1, h_2, \ldots, h_k$ mit

$$0 \leqslant h_1 \leqslant r_1, \ 0 \leqslant h_2 \leqslant r_2, \ldots, 0 \leqslant h_k \leqslant r_k, \ \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{h_\varkappa}{r_\varkappa} \leqslant (\tfrac{1}{2} - \varepsilon)\, k.$$

Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es zwei positive Zahlen K und P_3, von denen die erste nur von ε und n, die zweite nur von ε, n und k abhängt, so dass

$$H_\varepsilon \leqslant \frac{1}{2n} H \text{ für } k > K, \ min\ (r_1, r_2, \ldots, r_k) \geqq P_3$$

ist".

Wir wenden diesen Satz an, indem wir unter n den Grad des durch $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$ *erzeugten algebraischen Zahlkörpers verstehen; hiernach hängt* n nicht von k ab und ist n nicht kleiner als der Grad des durch $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ erzeugten Zahlkörpers.

Zu n und dem gegebenen ε werde nunmehr die Zahl K bestimmt und dazu $k > K$ fest ausgewählt. Danach werde weiter r_k fest, aber grösser als max (P_1, P_2, P_3) genommen und hierzu die Folge $\mathfrak{H}$ und damit die Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_k$ gemäss dem vorigen Paragraphen konstruiert; wegen (10) ist dann auch jede der letzteren Zahlen grösser als P_3, so dass sich auf

---

[2]) Hilfssatz 1 der Schneiderschen Arbeit.

n, ε, k, $r_1, r_2, \ldots, r_k$ der Schneidersche Satz anwenden lässt. Dies geschieht folgendermassen:

Sei

$$(11): \qquad R(z_1, z_2, \ldots, z_k) = \sum_{h_1=0}^{r_1} \ldots \sum_{h_k=0}^{r_k} R_{h_1 \ldots h_k} z_1^{h_1} \ldots z_k^{h_k}$$

ein Polynom mit unbestimmten Koeffizienten, von den Graden $r_1, r_2, \ldots, r_k$ in $z_1, z_2, \ldots, z_k$. Damit irgend eine der Ableitungen

$$R_{l_1 l_2 \ldots l_k}(z_1, z_2, \ldots, z_k) = \frac{\partial^{l_1 + \ldots + l_k} R(z_1, \ldots, z_k)}{l_1! \ldots l_k! \; \partial z_1^{l_1} \ldots \partial z_k^{l_k}}$$

an der Stelle $z_1 = \eta_1$, $z_2 = \eta_2$, $\ldots$ $z_k = \eta_k$ verschwindet, müssen die Koeffizienten $R_{h_1 \ldots h_k}$ offenbar höchstens n homogenen linearen Gleichungen mit rationalen Zahlkoeffizienten genügen. Damit alle Gleichungen

$$(12): \quad R_{l_1 \ldots l_k}(\eta_1, \ldots, \eta_k) = 0 \text{ für } 0 \leqslant l_1 \leqslant r_1, \ldots, 0 \leqslant l_k \leqslant r_k, \quad \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{l_\varkappa}{r_\varkappa} \leqslant \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) k$$

erfüllt sind, müssen also höchstens $n H_\varepsilon$, und nach den Satz von Schneider erst recht höchstens $H - 1$ homogene lineare Gleichungen mit rationalen Zahlkoeffizienten durch die H Koeffizienten von $R(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ erfüllt werden. Nach den klassischen Sätzen über lineare Gleichungen lässt sich folglich dieses Polynom $R(z_1, \ldots, z_k)$ so auswählen, dass es erstens nicht identisch verschwindet, zweitens ganze rationale Koeffizienten hat und drittens die sämtlichen abgeleiteten Werte den Gleichungen (12) genügen.

§ 4. Anwendung der Schneiderschen Identität.

Nach Schneider besteht eine Identität [3]):

$$(13): \qquad \Delta^{(1)}(z_1)\, \Delta^{(2)}(z_2) \ldots \Delta^{(k)}(z_k) =$$

$$= \sum_{\tau_1=0}^{t_1} \ldots \sum_{\tau_{k-1}=0}^{t_{k-1}} \Delta^{(1)}_{\tau_1}(z_1) \ldots \Delta^{(k-1)}_{\tau_{k-1}}(z_{k-1})\, R_{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_{k-1} 0}(z_1, z_2, \ldots, z_k).$$

---

[3]) Siehe die Schneidersche Arbeit oder auch § 7 meiner Arbeit Proc. Royal Acad. Amsterdam 39 (1936), 633—640 und 729—737.

Dabei bedeuten

$$\Delta^{(1)}(z_1),\ \Delta^{(2)}(z_2),\ \ldots,\ \Delta^{(k)}(z_k)$$

k Polynome in den einzelnen Veränderlichen, die sämtlich nicht identisch verschwinden,

$$\Delta^{(\varkappa)}_{\tau_\varkappa}(z_\varkappa)$$

gewisse andere Polynome, und $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$ gewisse nichtnegative ganze rationale Zahlen, die den Ungleichungen

$$(14):\qquad t_\varkappa + 1 \leqq \prod_{\lambda=\varkappa+1}^{k} (r_\varkappa + 1) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1)$$

genügen.

In dieser Identität werde den Unbestimmten das Wertsystem

$$z_1 = z_1^{(s)},\ z_2 = z_2^{(s)},\ \ldots,\ z_k = z_k^{(s)}$$

erteilt, wo s durch die Elemente von $\mathfrak{H}$ läuft. Da jeder Faktor der linken Seite von (13) nur an endlichvielen Stellen verschwindet, ferner aber wegen (4) jede der k Zahlen

$$\Delta^{(\varkappa)}(z_\varkappa^{(s)}) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

nur für endlichviele verschiedene s-Werte den gleichen Wert haben kann, so muss folglich für alle genügend grossen s aus $\mathfrak{H}$ die linke Seite von (13) ungleich Null sein, und also gilt für solche s eine Ungleichung

$$(15):\qquad R_{\tau_1 \ldots \tau_{k-1} 0}(z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \ldots, z_k^{(s)}) \neq 0$$

mit Indizes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k-1}$, für die

$$0 \leqq \tau_\varkappa \leqq t_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots\ k-1)$$

und daher auf Grund von (10) und (14)

$$(16):\qquad 0 \leqq \tau_\varkappa \leqq \varepsilon\, r_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1)$$

ist. Natürlich hängen diese Indizes aber noch von s ab.

§ 5. Schluss des Beweises.

Die linke Seite in (15) stellt eine rationale Zahl mit dem Nenner

$$q_1^{(s)\,r_1}\, q_2^{(s)\,r_2} \ldots q_k^{(s)\,r_k}$$

dar; da derselbe wegen der linken Hälfte von (9) nicht grösser als

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} q_k^{(s)^{r_k(1+\varepsilon)}}$$

ist, so gilt für alle genügend grossen s aus $\mathfrak{H}$

$$(17): \qquad \left|R_{\tau_1 \ldots \tau_{k-1}0}(z_1^{(s)}, \ldots, z_k^{(s)})\right| \geqslant q_k^{-kr_k(1+\varepsilon)}.$$

Andrerseits ist wegen (12) identisch

$$R_{\tau_1 \ldots \tau_{k-1}0}(z_1, \ldots, z_k) = \sum R_{l_1 l_2 \ldots l_k}(\eta_1, \ldots, \eta_k) \times$$

$$\times \binom{l_1}{\tau_1} \cdots \binom{l_{k-1}}{\tau_{k-1}} (z_1 - \eta_1)^{l_1 - \tau_1} \cdots (z_{k-1} - \eta_{k-1})^{l_{k-1} - \tau_{k-1}} (z_k - \eta_k)^{l_k},$$

wo summiert wird über alle $l_1, \ldots, l_k$ mit

$$0 \leqslant l_1 \leqslant r_1, \ldots, 0 \leqslant l_k \leqslant r_k, \quad \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{l_\varkappa}{r_\varkappa} > (\tfrac{1}{2} - \varepsilon)k.$$

Hieraus ergibt sich aber ohne Mühe leicht für alle genügend grossen s aus $\mathfrak{H}$ die Ungleichung

$$(18): \qquad \left|R_{\tau_1 \ldots \tau_{k-1}0}(z_1^{(s)}, \ldots, z_k^{(s)})\right| \leqslant q_k^{-kr_k\mu(\frac{1}{2} - 2\varepsilon)(1-\varepsilon)},$$

indem man die rechte Hälfte von (9) und die Ungleichungen (7) und (16) heranzieht. Nehmen wir also an, dass ε von Anfang an so klein gewählt wurde, dass

$$\mu(\tfrac{1}{2} - 2\varepsilon)(1-\varepsilon) > 1 + \varepsilon$$

ist, so führen (17) und (18) für grosse s auf einen Widerspruch.

§ 6. Anwendung des letzten Ergebnisses.

Die Binärform vom Grad $n \geqq 3$:

$$F(x,y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_n y^n$$

habe ganze rationale Koeffizienten, nichtverschwindende Diskriminante, und ersten Koeffizienten $a_0 \neq 0$. Wir nehmen an, dass für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$(19): \qquad |F(x,y)| \leqslant |y|^{n-2-\varepsilon}$$

unendlichviele teilerfremde ganzzahligen Lösungspaare

$$(x_\lambda, y_\lambda) \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

hat; ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann demnach angenommen werden, dass

(20): $$2 \leqq y_1 \leqq y_2 \leqq y_3 \leqq \ldots$$

ist und y_λ mit λ gegen ∞ strebt. **Dann gilt**

$$\overline{\lim_{\lambda \to \infty}} \frac{\log y_{\lambda+1}}{\log y_\lambda} = \infty.$$

Denn seien $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$ die reellen Nullstellen von $F(x,1)$; es muss mindestens eine solche geben, da sonst (19) trivialerweise nur endlichviele Lösungen haben kann. Alsdann existiert eine nur von der Form $F(x,y)$ abhängige positive Zahl C und ferner zu jedem $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ ein Index $\nu = \nu(\lambda)$ mit $1 \leqq \nu \leqq N$, so dass

$$\left| \frac{x_\lambda}{y_\lambda} - \zeta_\nu \right| \leqslant \frac{C}{y_\lambda^{2+\varepsilon}}$$

und also für alle genügend grossen λ

$$\left| \frac{x_\lambda}{y_\lambda} - \zeta_\nu \right| \leqq y_\lambda^{-\mu} \qquad \left(\mu = 2 + \frac{\varepsilon}{2} > 2\right)$$

ist; daraus folgt aber sofort die Behauptung.

Manchester, Ostern 1938.

(Eingegangen am 18. April 1938.)