Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen.

Kurt Mahler, Manchester.

(Eingegangen am 4. Oktober 1937.)

Vor kurzem gab ich für die zweite Hälfte des Khintchineschen Übertragungssatzes einen neuen Beweis, der sich auf den Minkowskischen Linearformensatz stützte (Matematitcheskij Sbornik T. 1 (43), 961). In dieser Note will ich mit der gleichen Methode allgemeinere Sätze über lineare Ungleichungen ableiten.

Satz 1: Sei $n \geqq 2$ eine natürliche Zahl; seien ferner

$$f_h(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{hk} x_k, \; g_h(x) = \sum_{k=1}^{n} b_{hk} x_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

je n Linearformen mit reellen Koeffizienten; die Determinante

$$d = | \, b_{hk} \, |_{h,k=1,2,\ldots,n}$$

verschwinde nicht, und die Bilinearform

$$\Phi(x, y) = \sum_{h=1}^{n} f_h(x) \, g_h(y) = \sum_{i,k=1}^{n} e_{ik} x_i y_k$$

habe lauter ganze rationale Koeffizienten e_{ik}. Die n Zahlen

$$t_1, t_2, \ldots, t_n$$

seien positiv. Existieren n ganze rationale Zahlen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

die nicht gleichzeitig verschwinden und die den Ungleichungen

$$| \, f_1(x) \, | = t_1, \; | \, f_2(x) \, | \leqq t_2, \; \ldots, \; | \, f_n(x) \, | \leqq t_n \qquad \text{(A)}$$

genügen, so gibt es noch n weitere ganze rationale Zahlen

$$y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

die ebenfalls nicht alle zugleich Null sind, und für die

$$| g_1(y) | \leqq \frac{(n-1)\lambda}{t_1}, \quad | g_2(y) | \leqq \frac{\lambda}{t_2}, \ldots, | g_n(y) | \leqq \frac{\lambda}{t_n}$$

$$\text{mit} \quad \lambda^{n-1} = | d | \prod_{h=1}^{n} t_h \tag{B}$$

ist.

Beweis: Die Koeffizienten der Form Φ sind offenbar gleich

$$e_{ik} = \sum_{h=1}^{n} a_{hi} b_{hk};$$

es ist daher

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^{n} e_{ik} x_i = \sum_{h=1}^{n} f_h(x) b_{hk}.$$

Die Determinante des Systems der n Linearformen in $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$\Phi(x, y), \; g_2(y), \; g_3(y), \; \ldots, \; g_n(y),$$

die ausgeschrieben gleich

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

ist, hat demnach den Wert

$$d f_1(x)$$

und ist insbesondere bis auf das Vorzeichen gleich

$$d t_1,$$

wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit dem ganzzahligen Lösungssystem von (A) gleichgesetzt werden, dessen Existenz angenommen wurde.

Nach dem Minkowskischen Linearformensatz gibt es folglich n ganze rationale Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_n$, die nicht alle gleichzeitig verschwinden und die den Ungleichungen

$$| \Phi(x, y) | < 1, \quad | g_2(y) | \leqq \frac{\lambda}{t_2}, \ldots, | g_n(y) | \leqq \frac{\lambda}{t_n}$$

$$\text{mit} \quad \lambda^{n-1} = | d | \prod_{h=1}^{n} t_h$$

genügen. Da nach unseren Voraussetzungen Φ eine ganze rationale Zahl ist, muß sogar

$$\Phi(x, y) = 0$$

und folglich

$$f_1(x)\, g_1(y) = - \sum_{h=2}^{n} f_h(x)\, g_h(y)$$

sein; aus den letzten Ungleichungen und aus (A) folgen damit ohne Mühe die behaupteten Ungleichungen (B).

Satz 2: Seien $f_h(x)$, $g_h(x)$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ $2n$ Linearformen mit den gleichen Eigenschaften wie in Satz 1. Auch die Determinante

$$| a_{hk} |_{h,k=1,2,\ldots,n}$$

verschwinde nicht. Zu jedem positiven ε gebe es n ganze rationale Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die nicht alle gleichzeitig verschwinden und so daß

$$\left| \prod_{h=1}^{n} f_h(x) \right| \leqq \varepsilon \tag{a}$$

ist. Alsdann gibt es auch für jedes positive ϑ n ganze rationale Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_n$, die nicht alle zugleich Null sind, und für welche

$$\left| \prod_{h=1}^{n} g_h(y) \right| \leqq \vartheta. \tag{b}$$

Beweis: Sei für die Lösungen von (a) genauer

$$| f_1(x) | = t_1, \quad | f_2(x) | \leqq t_2, \quad \ldots, \quad | f_n(x) | \leqq t_n \quad \text{mit} \quad \prod_{h=1}^{n} t_h = \varepsilon;$$

indem man die Veränderlichen nötigenfalls umbenennt, kann man sich auf Lösungen von (a) mit $t_1 > 0$ beschränken. Für die Zahlen x_h und t_h treffen alle Voraussetzungen aus Satz 1 zu. Also gibt es n weitere ganze rationale Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_n$, die nicht alle zugleich verschwinden, und die den Ungleichungen (B) aus Satz 1, also erst recht der einen Ungleichung

$$\left| \prod_{h=1}^{n} g_h(y) \right| \leqq (n-1)\, d^{\frac{n}{n-1}}\, \varepsilon^{\frac{1}{n-1}}$$

genügen; für genügend kleines ε folgt also die Behauptung.

Um ein Beispiel zu geben, werde $n = m + 1$ und

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x_0 + \Theta_1 x_1 + \ldots + \Theta_m x_m, & f_h(x) &= x_h \\ g_0(y) &= y_0, & g_h(y) &= y_h - \Theta_h y_0 \end{aligned} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

genommen, wo $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_m$ reelle Zahlen sind. Beide Formensysteme haben die Determinante 1; es wird

$$\Phi(x, y) = \sum_{h=0}^{m} f_h(x)\, g_h(y) = \sum_{h=0}^{m} x_h y_h.$$

Satz 1 kann also angewendet werden, auch noch, wenn die f mit den g vertauscht werden. Auf diese Weise ergibt sich insbesondere:

a) Sei $\beta \geqq 0$ und $x > 1$. Ist das Ungleichungssystem

$$|x_0 + \Theta_1 x_1 + \ldots + \Theta_m x_m| = x^{-(m+\beta)},$$
$$\max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|) \leqq x$$

lösbar in ganzen Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_m$, von denen die m letzten nicht alle zugleich verschwinden, so läßt sich auch das Ungleichungssystem

$$|y_0| \leqq my, \max_{h=1,2,\ldots,m} (|y_h - \Theta_h y_0|) \leqq y^{-\frac{1+\beta^*}{m}}$$

mit

$$\beta^* = \frac{\beta}{m^2 + (m-1)\beta}, \; y = x^{\frac{m^2+(m-1)\beta}{m}}$$

in ganzen Zahlen $y_0 \neq 0, y_1, \ldots, y_m$ lösen.

b) Sei $\beta \geqq 0$ und $y > m^{\frac{m}{m+\beta}}$. Ist das Ungleichungssystem

$$|y_0| = y, \max_{h=1,2,\ldots,m} |y_h - \Theta_h y_0|) \leqq y^{-\frac{1+\beta}{m}}$$

in ganzen Zahlen $y_0 \neq 0, y_1, \ldots, y_m$ lösbar, so läßt sich auch das Ungleichungssystem

$$|x_0 + \Theta_1 x_1 + \ldots + \Theta_m x_m| \leqq m x^{-(m+\beta^*)},$$
$$\max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|) \leqq x$$

mit

$$\beta^* = \beta, \; x = y^{\frac{1}{m}}$$

in ganzen Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_m$, von denen die m letzten nicht alle gleichzeitig verschwinden, lösen.

Aus Satz 1 folgen also beide Hälften des Khintchineschen Übertragungsprinzipes (Rend. Palermo **50** (1926), 170—195).

Es ist möglich, die bisherigen Ergebnisse zu verallgemeinern, indem man Φ durch allgemeinere Bilinearformen in den $f_h(x)$, $g_h(y)$ oder durch Multilinearformen in mehr als zwei Systemen von Linearformen ersetzt. Weiter kann man die Beschränkung auf reelle Formen fallen lassen und z. B. für jeden imaginär quadratischen Zahlkörper ein Analogon zum Khintchineschen Satz ableiten. Ohne hierauf einzugehen, wollen wir statt dessen lineare Formen mit p-adischen Koeffizienten betrachten. Dabei sei p eine feste Primzahl und der p-adische Wert $|\alpha|_p$, wie üblich, so normiert, daß $|p|_p = \frac{1}{p}$ ist. Dann gilt:

Satz 3: Sei $n \geqq 2$ eine natürliche Zahl; seien ferner

$$f_h(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}\, x_k,\quad g_h(x) = \sum_{k=1}^{n} b_{hk}\, x_k \quad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

je n Linearformen mit ganzen p-adischen Koeffizienten, derart daß die aus ihnen gebildete Bilinearform

$$\Phi(x, y) = \sum_{h=1}^{n} f_h(x)\, g_h(y) = \sum_{i,k=1}^{n} e_{ik}\, x_i\, y_k$$

lauter ganze rationale Koeffizienten hat. Wir setzen

$$c = 1 + \sum_{i,k=1}^{n} |\, e_{ik} \,|.$$

Sei X eine positive Zahl. Unter

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, s$$

seien $n + 1$ nicht negative ganze rationale Zahlen verstanden mit

$$s \geqq \max\,(s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

Existieren n ganze rationale Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die nicht alle zugleich verschwinden, und die den Ungleichungen

$$\begin{gathered} \max\,(|\, x_1 \,|, |\, x_2 \,|, \ldots, |\, x_n \,|) \leqq X, \\ |\, f_1(x) \,|_p = p^{-s_1},\ |\, f_2(x) \,|_p \leqq p^{-s_2}, \ldots, |\, f_n(x) \,|_p \leqq p^{-s_n} \end{gathered} \tag{A}$$

genügen, so gibt es noch n weitere ganze rationale Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_n$, die ebenfalls nicht alle zugleich Null sind, und für die

$$\begin{gathered} \max\,(|\, y_1 \,|, |\, y_2 \,|, \ldots, |\, y_n \,|) \leqq Y = \left\{ C X p^{\,1+(n-1)s-\sum\limits_{h=2}^{n} s_h} \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \\ |\, g_1(y) \,|_p \leqq p^{s_1-s},\ |\, g_2(y) \,|_p \leqq p^{s_2-s}, \ldots, |\, g_n(y) \,|_p \leqq p^{s_n-s} \end{gathered} \tag{B}$$

ist.

Beweis: Werden für die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ihre ganzen rationalen Zahlwerte eingesetzt, so geht Φ in eine Linearform in $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mit ganzen rationalen, also erst recht ganzen p-adischen Koeffizienten über. Nach meinem p-adischen Analogon zum Minkowskischen Linearformen-Satz (Jber. D. Math. Ver. **44** (1934), 250—255) existieren daher n ganze rationale Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_n$, die nicht alle zugleich verschwinden, und die den Ungleichungen

$$\max\,(|\, y_1 \,|, |\, y_2 \,|, \ldots, |\, y_n \,|) \leqq Y,$$

$$|\, \Phi(x, y) \,|_p \leqq \frac{1}{C\,X\,Y},\quad |\, g_h(y) \,|_p \leqq p^{s_h - s} \quad (h = 2, 3, \ldots, n)$$

genügen. Andererseits ist das hiermit gebildete Φ ganz rational und

$$|\Phi(x, y)| < CXY;$$
es muß also
$$\Phi(x, y) = 0$$
und demnach
$$f_1(x)\, g_1(y) = -\sum_{h=2}^{n} f_h(x)\, g_h(y)$$
sein, sodaß sich wegen (A) und des schon bewiesenen Teiles von (B) die Behauptung ergibt.

Für die Anwendungen wird man die Indizes so wählen, daß gerade s_1 möglichst klein ist.

Um ein Beispiel zu geben, leiten wir das p-adische Analogon zum Khintchineschen Satz ab. Seien zu diesem Zwecke $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_m$ m ganze p-adische Zahlen; wir setzen in Satz 3 $n = m + 1$ und alsdann
$$\left.\begin{aligned} f_h(x) &= x_h \\ g_h(y) &= y_h - \Theta_h\, y_{m+1} \end{aligned}\right\} \quad (h = 1, 2, \ldots, m),$$
$$f_{m+1}(x) = \Theta_1 x_1 + \ldots + \Theta_m x_m + x_{m+1}$$
$$g_{m+1}(y) = y_{m+1},$$
so daß also
$$\Phi(x, y) = \sum_{h=1}^{m+1} f_h(x)\, g_h(y) = \sum_{h=1}^{m+1} x_h\, y_h$$
und $C = m + 2$ ist. Satz 3 läßt sich wieder auf zwei Arten anwenden, indem man das einemal die f mit den g vertauscht. Man erhält so folgende Ergebnisse:

a) Sei $\beta \geqq 0$ und $x > 1$, ferner das Ungleichungssystem
$$\begin{aligned} |\Theta_1 x_1 + \ldots + \Theta_m x_m + x_{m+1}|_p &\leqq x^{-(m+\beta+1)}, \\ \max(|x_1|, \ldots, |x_m|, |x_{m+1}|) &\leqq x \end{aligned} \tag{1}$$
in ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$ erfüllt, die nicht alle verschwinden und sogar nicht alle durch p teilbar sind. Alsdann ist evidenterweise sogar eine der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_m$, etwa ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Zahl x_1, zu p teilerfremd, also
$$|x_1|_p = 1,\ |x_2|_p \leqq 1, \ldots, |x_m|_p \leqq 1.$$
Folglich existieren wegen (1) nach Satz 3 auch $m + 1$ ganze rationale Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}$, die nicht alle gleich Null sind, und die den Ungleichungen
$$\max(|y_1 - \Theta_1 y_{m+1}|_p, \ldots, |y_m - \Theta_m y_{m+1}|_p) \leqq y^{-1-\frac{1+\beta^*}{m}},$$
$$\max(|y_1|, \ldots, |y_m|, |y_{m+1}|) \leqq (m+2)^{\frac{1}{m}}\, p\, y$$
mit

$$\beta^* = \frac{\beta}{m^2 + (m-1)\beta}, \qquad y = x^{\frac{m^2+(m-1)\beta}{m}}$$

genügen. Sei p^a alsdann die größte Potenz von p, die gleichzeitig in den y_h aufgeht, und werde

$$y_h = p^a \eta_h \;\; (h = 1, 2, \ldots, m+1)$$

gesetzt, so daß also mindestens eine der Zahlen η_h zu p teilerfremd wird. Diese Zahlen genügen offenbar den Ungleichungen

$$\max(|\eta_1 - \Theta_1 \eta_{m+1}|_p, \ldots, |\eta_m - \Theta_m \eta_{m+1}|_p) \leqq$$
$$\leqq p^a y^{-1-\frac{1+\beta^*}{m}} = p^{-a\frac{1+\beta^*}{m}} \eta^{-1-\frac{1+\beta^*}{m}} \leqq \eta^{-1-\frac{1+\beta^*}{m}}, \qquad (1')$$
$$\max(|\eta_1|, |\eta_2|, \ldots, |\eta_{m+1}|) \leqq (m+2)^{\frac{1}{m}} p\eta, \text{ wo } \eta = p^{-a} y.$$

Kann den Ungleichungen (1) mit beliebig großen x genügt werden, so folgt leicht, daß auch (1′) für beliebig große η Lösungen hat.

b) Sei $\beta \geqq 0$ und $y > 1$, ferner das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned}&\max(|y_1 - \Theta_1 y_{m+1}|_p, \ldots, |y_m - \Theta_m y_{m+1}|_p) \leqq y^{-1-\frac{1+\beta}{m}},\\ &\max(|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_{m+1}|) \leqq y\end{aligned} \qquad (2)$$

in ganzen Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}$ erfüllt, die nicht alle verschwinden und sogar nicht sämtlich durch p teilbar sind; dann ist insbesondere

$$|y_{m+1}|_p = 1.$$

Folglich existieren wegen (2) nach Satz 3 auch $m+1$ ganze rationale Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$, die nicht alle gleich Null sind, und die den Ungleichungen

$$|\Theta_1 x_1 + \ldots + \Theta_m x_m + x_{m+1}|_p \leqq x^{-(m+\beta^*+1)},$$

$$\max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{m+1}|) \leqq ((m+2)\,p)^{\frac{1}{m}}\, x$$

mit

$$\beta^* = \beta, \;\; x = y^{\frac{1}{m}}$$

genügen. Sei p^b die größte Potenz von p, die gleichzeitig in allen x_h aufgeht, und werde

$$x_h = p^b \xi_h \;\; (h = 1, 2, \ldots, m+1)$$

gesetzt, so daß mindestens eine der Zahlen ξ_h zu p teilerfremd ist. Diese Zahlen genügen offenbar den Ungleichungen

$$|\Theta_1 \xi_1 + \ldots + \Theta_m \xi_m + \xi_{m+1}|_p \leqq p^b x^{-(m+\beta^*+1)} =$$
$$= p^{-(m+\beta^*)b} \xi^{-(m+\beta^*+1)} \leqq \xi^{-(m+\beta^*+1)}, \qquad (2')$$
$$\max(|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_{m+1}|) \leqq ((m+2)\,p)^{1/m}\, \xi, \text{ wo } \xi = p^{-b} x.$$

Haben insbesondere die Ungleichungen (2) für beliebig große y Lösungen, so lassen sich auch die Ungleichungen (2') mit beliebig großem ξ lösen.

Der Khintchinesche Satz ist damit fast ohne Änderung aufs p-adische übertragen. Teil b wurde schon 1936 von Herrn Turkstra (Diss. Vrije Univ. Amsterdam, III stelling 4*, p. 52) und zwar ebenso bewiesen.

*

Princip přenosu pro lineární nerovnosti.

(Obsah předešlého článku.)

Buďte

$$f_h(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{hk} x_k, \ \ g_h(x) = \sum_{k=1}^{n} b_{hk} x_k \ \ (h = 1, \ldots, n)$$

dva systémy lineárních reálných forem, při čemž budiž $d \neq 0$ determinant čísel b_{hk}. Bilineární forma $f_1(x)\, g_1(y) + \ldots + f_n(x)\, g_n(y)$ nechť má celistvé koeficienty. Nechť $t_1 > 0, \ldots, t_n > 0$ a nechť existuje mřížový bod $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tak, že

$$|\, f_1(x)\, | = t_1, \ |\, f_2(x)\, | \leqq t_2, \ldots, |\, f_n(x)\, | \leqq t_n.$$

Potom existuje mřížový bod $y \neq 0$ tak, že

$$|\, g_1(x)\, | \leqq (n - 1)\, \lambda t_1^{-1}, \quad |\, g_h(x)\, | \leqq \lambda t_h^{-1}\, (h = 2, 3, \ldots, n),$$

kde $\lambda > 0$, $\lambda^{n-1} = |\, d\, |\, t_1 \ldots t_n$.

Následují aplikace této věty, hlavně důkaz dvou vět Chinčinových. Druhá část práce obsahuje analogické úvahy pro případ, že a_{hk}, b_{hk} jsou celá čísla p-adická.