BEMERKUNGEN ÜBER DIE DIOPHANTISCHEN EIGENSCHAFTEN DER REELLEN ZAHLEN.

Von KURT MAHLER in Manchester.

Bei Untersuchungen über Diophantische Approximationen wird bekanntlich häufig von folgenden zwei Prinzipien Gebrauch gemacht:

a. Ist a ganz rational und $|a| > 0$, so ist sogar $|a| \geq 1$.

b. Sind $n + 1$ Dinge auf n Mengen verteilt, so sind in einer dieser Mengen mindestens zwei Dinge (Schubfach-Prinzip).

Während *a*) eine arithmetische Aussage macht, ist *b*) mengentheoretischer Art, und um von diesem Prinzip Anwendungen zu machen, muss man noch geeignete Dichtigkeitseigenschaften heranziehen, die merkwürdigerweise fast niemals explizit erwähnt werden [1]). Aus diesem Grund möchte ich in der vorliegenden Note eine Zusammenstellung von Eigenschaften der reellen Zahlen geben, die für Untersuchungen über Diophantische Approximationen heranzuziehen sind und auch anscheinend ausreichen.

A. Allgemeine Eigenschaften:

Die rationalen Zahlen bilden einen Körper R, der der Quotientenkörper des Ringes J aller ganzen rationalen Zahlen ist. R besitzt die Absolutbetrag-Bewertung $|a|$; seine perfekte Erweiterung in bezug auf dieselbe ist der Körper $\mathfrak{R}$ der reellen Zahlen. Die Bewertung $|a|$ ist Archimedisch; es gibt also Zahlen aus J mit beliebig grossem Absolutbetrag (Da der Absolutbetrag jeder ganzen rationalen Zahl $\neq 0$ eine natürliche Zahl ist, so lässt sich dies auch ausdrücken: Es gibt beliebig grosse natürliche Zahlen).

B. Das Schubfachprinzip.

C. Diophantische Eigenschaften:

1. Ist a ganz rational und $>|a|\ 0$, so ist sogar $|a| \geq 1$.

2. Für jedes natürliche k gibt es mindestens $2k+1$ verschiedene ganze rationale Zahlen a mit $|a| \leq k$.

3. Für jedes natürliche k gibt es höchstens $2k+1$ verschiedene ganze rationale Zahlen a mit $|a| \leq k$.

4. Zu jeder reellen Zahl α gibt es eine ganze rationale Zahl a, so dass $|\alpha - a| \leq \frac{1}{2}$ ist.

5. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$ eine gerade Anzahl von reellen Zahlen, so gibt es zwei dieser Zahlen α_i und α_j mit $i \neq j$ und

$$|\alpha_i - \alpha_j| \leq \frac{2}{2k-1} \max (|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{2k}|).$$

6. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k+1}$ eine ungerade Anzahl von reellen Zahlen, so gibt es zwei dieser Zahlen α_i und α_j mit $i \neq j$ und

$$|\alpha_i - \alpha_j| \leq \frac{1}{k} \max (|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{2k+1}|).$$

(Man beachte, dass 1)—3) sich auf ganze rationale Zahlen, 4)—6) aber auf beliebige reelle Zahlen beziehen).

---

1) Siehe jedoch z.B. das erste Kapitel von Minkowski Diophantische Approximationen, und Bachmann, Quadratische Formen II, p. 28—29.

Die Eigenschaften C sind nun bemerkenswerterweise nicht vollkommen unabhängig von einander, wie hier gezeigt werden soll. Alle Aussagen sind so zu verstehen, dass die Eigenschaften A und B vorausgesetzt werden:

Satz 1. C3 folgt aus C1 und C5.

Beweis: Die Behauptung C3 sei falsch; zu der natürlichen Zahl k gebe es also mindestens $2k + 2$ ganze rationale, von einander verschiedene Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ mit $|a_i| \leq k$. Dann muss es zwei hiervon, etwa a_i und a_j mit $i \neq j$, also $a_i \neq a_j$, und mit

$$|a_i - a_j| \leq \frac{2k}{2k+1} < 1$$

wegen C5 geben; da $a_i - a_j$ aber ganz rational ist, steht dies im Widerspruch zu C1.

Satz 2: C4 folgt aus C1, C2 und C6.

Beweis: Die reelle Zahl α sei beliebig, doch werde ohne Einschränkung angenommen, dass $|\alpha| > \frac{1}{2}$ ist, da sonst die Behauptung mit $a = 0$ schon zutrifft. Unter k werde irgend eine natürliche Zahl verstanden, die grösser als $|\alpha|$ ist. Nach C2 gibt es mindestens $2k + 1$ verschiedene ganze rationale Zahlen, etwa $a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1}$, deren Absolutbetrag nicht grösser als k ist. Wird C6 auf die $2k + 3$ Zahlen

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1}, a_{2k+2} = \alpha, a_{2k+3} = -\alpha$$

angewandt, so folgt, dass zwei dieser Zahlen a_i und a_j mit $i \neq j$ der Ungleichung

$$|a_i - a_j| \leq \frac{k}{k+1} < 1$$

genügen. Wegen C1 kann nicht gleichzeitig $i \leq 2k + 1$ und $j \leq 2k + 1$ sein, und wegen der Voraussetzung $|\alpha| > \frac{1}{2}$ ist andrerseits nicht zugleich $i \geq 2k + 2$ und $j \geq 2k + 2$. Also folgt, dass zu α eine ganze Zahl a existiert mit $|\alpha - a| < 1$. Sei zur Abkürzung $\beta = \alpha - a$, also $|\beta| < 1$. Wir wenden C2 noch einmal an, diesmal mit $k = 1$, so dass die Existenz von mindestens drei ganzen Zahlen b_1, b_2, b_3 höchstens vom Absolutbetrag 1 folgt. Damit sind fünf Zahlen

$$b_1, b_2, b_3, b_4 = \beta, b_5 = -\beta$$

abgeleitet, die sämtlich höchstens vom Absolutbetrag 1 sind. Nach C6 muss es also zwei hiervon, b_i und b_j mit $i \neq j$, geben so dass

$$| b_i - b_j | \leq \tfrac{1}{2} . 1 = \tfrac{1}{2}$$

ist. Es kann evidenterweise nicht $i \leq 3$ und $j \leq 3$ zur gleichen Zeit sein. Ist $i = 4$ und $j = 5$, so folgt sogar $| 2(\alpha - a) | \leq \frac{1}{2}$, also erst recht die Behauptung. Endlich für $i \leq 3$ und $j \geq 4$ muss eine der beiden Ungleichungen

$$| b_i + a - \alpha | \leq \tfrac{1}{2} \quad \text{oder} \quad | b_i - a + \alpha | \leq \tfrac{1}{2}$$

gelten, so dass auch dann die Behauptung folgt.

Satz 3: C5 folgt aus C1, C3 und C4.

Sei N eine vorläufig noch willkürliche natürliche Zahl und seien $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2k}$ eine gerade Anzahl beliebiger reeller Zahlen mit

$$| \beta_i | \leq k - \tfrac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{N}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k)$$

Wegen C4 gibt es zu jedem β_i eine ganze rationale Zahl b_i mit $| \beta_i - b_i | \leq \frac{1}{2}$. Für jeden Index i ist also $| b_i | \leq k - 1/\mathrm{N}$ und folglich sogar $| b_i | \leq k - 1$. Nach C3 gibt es höchstens $2k - 1$ verschiedene ganze rationale Zahlen, deren Absolutbetrag $k - 1$ nicht übersteigt; unter den $2k$ ganzen Zahlen b_i muss es daher auf Grund des Schubfachprinzipes zwei, etwa b_i und b_j mit $i \neq j$, geben, so dass $b_i = b_j$ ist. Dann wird gerade

$$| \beta_i - \beta_j | = | (\beta_i - b_i) - (\beta_j - b_j) | \leq 1 .$$

Seien nun $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$ die $2k$ Zahlen, für die die Behauptung C5 nachgewiesen werden soll. Wenn diese Zahlen nicht alle gleichzeitig verschwinden, in welchem Fall nichts zu beweisen ist, kann durch eine Aehnlichkeitstransformation immer erreicht werden, dass

$$\max (| \alpha_1 |, | \alpha_2 |, \ldots, | \alpha_{2k} |) = k - \tfrac{1}{2}$$

ist. Wir werden die vorigen Ueberlegungen auf die aus den α_i abgeleiteten Zahlen

$$\beta_i = \frac{k - \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{N}}}{k - \frac{1}{2}} \, \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k)$$

an; alsdann ist also etwa $| \beta_i - \beta_j | \leq 1$ mit einem Indexpaar i, j, wo $i \neq j$ ist, und folglich gleichzeitig

$$(1): \qquad | \alpha_i - \alpha_j | \leq \frac{k - \frac{1}{2}}{k - \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{N}}}, \; i \neq j .$$

Hier hängt das Indexpaar i, j noch von N ab, hat aber nur eine beschränkte und von N unabhängige Anzahl von Möglichkeiten, nämlich $2k(2k-1)/2$. Also muss eine über alle Grenzen wachsende Folge $N_1, N_2, N_3, \ldots.$ von Werten für N existieren, für die (1) immer mit dem gleichen Paar i, j erfüllt ist; wird der Grenzübergang rechts für $N \to \infty$ vollzogen, so folgt

$$|\alpha_i - \alpha_j| \leq 1,$$

und damit die Behauptung.

Satz 4: C6 folgt aus C1, C2, C3 und C4.

Beweis: Nach Satz 3 darf beim Beweis auch von C5 Gebrauch gemacht werden, da diese Eigenschaft aus den Voraussetzungen folgt. — Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k+1}$ beliebige $2k+1$ reelle Zahlen; ähnlich wie beim Beweis des vorigen Satzes kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$\max(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{2k+1}|) = k$$

angenommen werden. Sei N eine natürliche Zahl, über die später verfügt wird und $h_1, h_2, \ldots, h_{2N+1}$ eine Menge von $2N+1$ verschiedenen ganzen rationalen Zahlen, deren Absolutbetrag N nicht übersteigt; diese Menge existiert wegen C2. Wir setzen

$$\beta_i^{(m)} = \alpha_i + \frac{h_m}{2N} \qquad \begin{pmatrix} i &= 1, 2, \ldots, 2h+1 \\ m &= 1, 2, \ldots, 2N+1 \end{pmatrix}$$

und haben also

$$|\beta_i^{(m)}| \leq k + \tfrac{1}{2}.$$

Es gibt gemäss dieser Definition genau

$$(2k+1)(2N+1) = 2\big((2k+1)N + k\big) + 1$$

Zahlen $\beta_i^{(m)}$; um eine gerade Anzahl solcher Zahlen zu erhalten, denken wir deshalb irgend eine davon fortgelassen. Wegen C5 muss es dann zwei Zahlen $\beta_i^{(m)}$ und $\beta_j^{(n)}$ geben, deren Indizes (i, m) und (j, n) nicht übereinstimmen, so dass

$$|\beta_i^{(m)} - \beta_j^{(n)}| \leq \frac{2}{2\big((2k+1)N + k\big) - 1}\,(k + \tfrac{1}{2}) < \frac{1}{2N}$$

ist. Nun kann aber nicht $i = j$ und folglich $m \neq n$ sein, denn dann wäre

$$\frac{1}{2N} > |\beta_i^{(m)} - \beta_i^{(n)}| = \left|\frac{h_m - h_n}{2N}\right|$$

entgegen C1. Also ist $i \neq j$ und alsdann

$$\left| \left((\alpha_i + \frac{h_m}{2\,\mathrm{N}} \right) - \left((\alpha_j + \frac{h_n}{2\mathrm{N}} \right) \right| < \frac{1}{2\mathrm{N}}$$

und erst recht

$$| \alpha_i - \alpha_j | < \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2\mathrm{N}} = 1 + \frac{1}{2\mathrm{N}}.$$

Indem ganz wie beim Beweis von Satz 3 ein geeigneter Grenzübergang für N vorgenommen wird, folgt, dass für ein geeignetes Paar von Indizes i, j mit $i \neq j$ die Ungleichung

$$| \alpha_i - \alpha_j | \leq 1$$

erfüllt ist, wie gezeigt werden sollte.

Bei den Eigenschaften C benutzten wir, dass die natürlichen Zahlen und positiven reellen Zahlen angeordnet und dass die Körper der rationalen und der reellen Zahlen bewertet sind; dagegen wurde nicht herangezogen, dass diese Körper ebenfalls angeordnet sind. Benutzt man die letztere Eigenschaft, so kann man C 1—6 durch etwas einfachere, aber ähnliche Eigenschaften ersetzen. — Entsprechende Aussagen hat man in R in bezug auf die p-adischen Bewertungen, und auch für andere Bereiche, z.B. für endliche algebraische Zahlkörper.

Manchester, 9. 11. 1938.