某種特別整數之產生函數

(On The Generating Functions of Integers with A Missing Digit)

庫特·麻勒 (K.Mahler)*

令 n 爲一正整數，如以十進法表示之，其中每位數字均不等於零。設 N 爲此種 n 所成之集合，吾人熟知級數

$$\sigma=\sum_{n\varepsilon N}\frac{1}{n}$$

爲收斂者。其值 σ 是否一超越數，又是否可用平常函數表示之，爲相當困難之問題，作者未能解決之。本文中吾人將討論一較簡單之級數

$$f(z)=\sum_{n\varepsilon N} z^n,$$

此級數與 σ 有下列之關係

$$\sigma=\int_0^1\frac{f(z)}{z}dz。$$

吾人將證明，當z爲一代數數(algebraic number)且 $0<|z|<1$ 時，$f(z)$ 以及其他類似之函數之值均爲超越數。

§1. **問題之陳述:** 設$q\geq2$ 爲一固定之整數，任何正整數 n 可用 q 進法以表示之如下:

$$n=h_0+h_1q+\cdots+h_rq^r=(h_0,h_1,\cdots,h_r),$$

其中 $h_0,\cdots,h_r$ 爲 0 與 $q-1$ 中之整數且 $h_r\neq0$。當 $n=0$ 時，吾人可直書

$$0=(0)。$$

設 k 爲$0,1,\cdots,q-1$中之一固定數字，令 $N(k)$ 表示所有適合下列條件之整數 n 所成之集合

$$n=(h_0,h_1,\cdots,h_r)\geq0,\quad 0\leq h_\varrho\leq q-1,\ h_\varrho\neq k$$
$$(\varrho=0,1,\cdots,r)。$$

本文目的在討論 $N(k)$ 之產生函數

$$f_k(z)=\sum_{n\varepsilon N(k)} z^n$$

之性質。

§2. $f(z)$ **所適合之函數方程。** 顯然，$(1-z)^{-1}$爲 $f_k(z)$ 之長函數(majorizer, dominating function)

$$f_k(z)<<(1-z)^{-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}z^\nu。$$

因之，當 $|z|<1$ 時，$f_k(z)$ 所表之級數爲絕對收斂。此後吾人將假設 z 之絕對值恒小於一。

$f_k(z)$ 與 $f_k(z^q)$ 中有一簡單之關係，當 $k=0$ 或 $k\neq0$ 時，略有不同，今分別討論之如下:

I. $k=0$. 設 $n=(h_0,\cdots,h_r)$屬於 $N(0)$，則有二種可能: (i) $r=0$, $n=h_0$, 故 n 爲 $1,2,\cdots,q-1$ 中之一整數; (ii) $r\geq1$, n 可書爲下列和數

$$n=h_0+qn',$$

其中 $n'=(h_1,h_2,\cdots,h_r)\varepsilon N(0)$, $1\leq h_i\leq q-1$, $(i=0,1,\cdots,r)$。因之，吾人恒有

$$f_0(z)=\sum_{h_0=1}^{q-1}\left\{z^{h_0}+\sum_{n'\varepsilon N(0)}z^{h_0+qn'}\right\}。$$

自此可得

$$\text{(I)}\qquad f_0(z)=\frac{z-z^q}{1-z}(1+f_0(z^q))$$

II. $k=1,2,\cdots,q-1$。設 $n=(h_0,\cdots,h_r)$ 屬於 $N(k)$，則 n 可書爲下列和數

$$n=h_0+qn',$$

其中h_0爲$0,1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,q-1$中之一數，且 $n'=(h_1,\cdots,h_r)\varepsilon N(k)$。顯然，吾人有

$$f_k(z)=\sum_{\substack{h_0=0\\h_0\neq k}}^{q-1}\ \sum_{n'\varepsilon N(k)}z^{h_0+qn'}$$

因之，$f_k(z)$ 適合

$$\text{(II)}\qquad f_k(z)=\left(\frac{1-z^q}{1-z}-z^k\right)f_k(z^q)。$$

函數方程 (I) 與 (II) 皆包含於下列式中

$$(1)\qquad f_k(z)=\left(\frac{1-z^q}{1-z}-z^k\right)(\varepsilon_k+f_k(z^q))$$

$$(k=0,1,\cdots,q-1)$$

---

*作者麻勒博士，原籍德國，現任英國曼哲斯特大學講師。氏之數學工作，屬於數論方面，著述鴻富，均有價值。氏生平崇拜中國文化，習中文，能作中文信札。本文係氏由英國投寄，原文爲英文，由王憲鍾君譯成中文。氏對我國科學之熱情與期望，彌足心感焉。——陳省身

其中

(2) $$\varepsilon_k=\begin{cases}1, & 如\ k=0\\ 0, & 如\ k\neq 0\end{cases}$$

例:當 $q=2$ 時,吾人有

$$f_0(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty} z^{2^\nu-1} \qquad f_1(z)=1,$$

$$f_0(z)=z+zf_0(z^2), \qquad f_1(z)=f_1(z^2)。$$

§3. $f_k(z)$ **之解析質。** 設 $q\geqq 2$ 為一任意整數,根據定義,吾人有

$$f_0(z)=z+z^2+\cdots\cdots+z^{q-1}+\cdots\cdots$$

$$f_k(z)=1+z+\cdots\cdots+z^{k-1}+z^{k+1}+\cdots\cdots$$

$$(k=1,2,\cdots\cdots,q-1),$$

因之

(3) $$\lim_{\nu\to\infty} f_k(z^{q^\nu})=1-\varepsilon_k \quad (k=0,1,\cdots\cdots,q-1)。$$

另一方面,自函數方程 (I) 與 (II) 可推出下列結果:

(4) $$f_0(z)=\frac{z-z^q}{1-z}+\frac{z-z^q}{1-z}\,\frac{z^q-z^{q^2}}{1-z^q}+\frac{z-z^q}{1-z}\,\frac{z^q-z^{q^2}}{1-z^q}\,\frac{z^{q^2}-z^{q^3}}{1-z^{q^2}}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{z-z^q}{1-z}\,\frac{z^q-z^{q^2}}{1-z^q}\cdots\cdots\frac{z^{q^{\nu-1}}-z^{q^\nu}}{1-z^{q^{\nu-1}}}\left(1+f_0(z^{q^\nu})\right),$$

(5) $$f_k(z)=\left(\frac{1-z^q}{1-z}-z^k\right)\left(\frac{1-z^{q^2}}{1-z^q}-z^{kq}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1-z^{q^\nu}}{1-z^{q^{\nu-1}}}-z^{kq^{\nu-1}}\right)f_k(z^{q^\nu})$$
$$(k=1,2,\cdots\cdots,q-1)$$

定理一: 除 $q=2, k=1$ 特殊情形外,$f_k(z)$ 在單位圓內為一分析函數 (analytic function),且以單位圓為天然邊界(natural boundary)。

證明:設 k 與 λ 為大於或等於零之整數,又設

$$\Theta=e^{\frac{2\pi ki}{q^\lambda}}$$

為一 q^λ 次之原始單位根(primitive q^λ-th root of unity)。當 $\lambda\geqq$ 時,多項式

$$\frac{z^{q^{\nu-1}}-z^{q^\nu}}{1-z^{q^{\nu-1}}},\quad \frac{1-z^{q^\nu}}{1-z^{q^{\nu-1}}}-z^{kq^{\nu-1}}$$
$$(\nu=1,2,\cdots\cdots,\lambda)$$

之次數小於 q^ν。因之,當 $z=\Theta$ 時,此二式均不等於零。此後吾人將 $q=2$, $k=1$ 一情形除外,則當 r 沿實軸自 0 至 1 時,顯然

(6) $$\lim_{r\to 1} f_k(r)=\infty。$$

根據 (4),(5),(6) 三式,以及 $\Theta^{q^\lambda}=1$,吾人極易推得

$$\lim_{r\to 1} f_k(r\Theta)=\infty。$$

在單位圓上,全部 Θ 點造成一密集點集 (dense set),故此圓上每點均係異點 (singular point),明所欲證。

系: 將 $q=2$, $k=1$ 一情形除外,則 $f_k(z)$ 恒為 z 之超越函數 [1]。

§4. $f_k(z)$ **之算術性質** 作者曾得一結果 [2],其特殊情形可述之如下:

定理二: 設 $q\geqq 2$ 為一固定之整數,又設

$$F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu z^\nu$$

為一具有下列性質之冪級數:(i) α_ν 皆為有理數;(ii) $F(z)$ 在 $z=0$ 之鄰近收斂;(iii) $f(z)$ 非 z 之代數函數 (algebraic function);(iv) $F(z)$ 適合

$$F(z^q)=\frac{a(z)F(z)+b(z)}{c(z)F(z)+d(z)}$$

其中 $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$, $d(z)$ 為 z 之多項式,且其係數均為有理數,且 $\Delta(z)=a(z)d(z)-b(z)c(z)$ 不恒等於零。如 z 為一代數數,且

$$0<|z|<1,\quad \Delta(z^{q^\nu})\neq 0 \quad (\nu=0,1,2\cdots\cdots)$$

則 $F(z)$ 為一超越數 [2]。

當此函數 $F(z)$ 為 $f_k(z)$ 時,吾人有

$$a(z)=1,\quad b(z)=-\frac{z-z^q}{1-z},$$

$$c(z)=0,\quad d(z)=\frac{z-z^q}{1-z},$$

或

$$a(z)=1,\quad b(z)=c(z)=0,$$

$$d(z)=\frac{1-z^q}{1-z}-z^k,$$

視 $k=0$ 或 $k\neq 0$ 而定。於是乃得

定理三: 設 z 為一代數數,當 $k=0$ 或 $k=1,2,\cdots\cdots, q-1$ 時,分別適合不等式

$$0<|z|<1$$

或

$$0<|z|<1,\ \frac{1-zq^{\nu}}{1-zq^{\nu-1}}-z^{k}q^{\nu-1}\neq 0$$

$$(\nu=0,1,\cdots\cdots),$$

則 $f_k(z)$ 為一超越數。另一方面，吾人恒有

$$f_k(0)=1-\varepsilon_k\ (k=0,1,\cdots,\ q-1)。$$

又如 $k=1,2,\cdots,q-1,\ 0<|z|<1$, 且有 $\nu(=0,1,2,\cdots)$ 存在使

$$\frac{1-zq^{\nu}}{1-zq^{\nu-1}}-z^{k}q^{\nu-1}=0,$$

則 $f_k(z)=0$.

§5. $f_k(z)$ **之零點**。令

$$\varphi_k(z)=\frac{1-z^q}{1-z}-z^k\quad(k=1,2,\cdots,q-1),$$

則吾人有恒等式

(7) $$\varphi_k\left(\frac{1}{z}\right)=z^{-(q-1)}\ \varphi_{q-k-1}\ (z)。$$

今將討論 $\varphi_k(z)$ 之零點 ζ。設此全體零點中，有 $\mu(k)$ 個 ζ 其絕對值小於一，又有 $\nu(k)$ 個 ζ 其絕對值等於一。自下列二式

$$\varphi_{q-1}(z)=1+z+\cdots+z^{q-2}\quad(任意之\ q)$$

$$\varphi_{\frac{q-1}{2}}(z)=(1+z+\cdots+z^{\frac{q-3}{2}})(1+z^{\frac{q+1}{2}})$$

$$(q\ 為奇數)$$

吾人知，當 $k=q-1$ 或 $k=\frac{q-1}{2}$ 為一整數時，

$$\mu(k)=0。$$

又自 (7) 式，可得

(8) $$\nu(k)=\nu(q-k-1)。$$

定理四：設 k 為適合 $1\leq k\leq q-2$ 之整數，且 $k\neq\frac{q-1}{2}$，則 $\mu(k)>0$。

證明：$\varphi_k(z)$ 為一 $q-1$ 次多項式，故吾人只需證明 $\nu(k)<q-1$ 即可，所有 $\varphi_k(z)$ 之零點之乘積為 ±1；因之，如零點中有絕對值不等於一者，則必有一零點，其絕對值小於一。

根據(8)式，吾人僅需討論下列情形

(9) $$k=1,2,\cdots,\left[\frac{q-2}{2}\right]。$$

在單位圓上，$\varphi_k(z)$ 無多重零點(multiple zero)。因否則

$$1-z^q-z^k+z^{k+1}=0,$$

$$qz^{q-1}+kz^{k-1}-(k+1)z^k=0,$$

於是乃有

$$(q-k)z^q=z^{k+1}-k,$$

故

$$q-k\leq k+1,\qquad k\geq\frac{q-1}{2},$$

此與假設衝突。

設 $\zeta=e^{\alpha i}\ (0<\alpha<2\pi)$ 為

$$\varphi_k(z)=(1+z+\cdots+z^{q-1}-z^k)$$

在單位圓上之一零點。因

$$z^{-\frac{q-1}{2}}\varphi_k(z)=\frac{z^{\frac{q}{2}}-z^{-\frac{q}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}}-Z^{-\frac{q-2k-1}{2}}$$

故 ζ 適合下列方程

$$\frac{\sin\frac{q\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\cos\frac{q-2k-1}{2}\alpha-i\sin\frac{q-2k-1}{2}\alpha。$$

因之，

$$\sin\frac{q-2k-1}{2}\alpha=0,$$

故

$$\alpha=\frac{2n\pi}{q-2k-1}$$

其中 n 為 $1,2,\cdots,\ q-2k-1$ 中之一數。但 $q-2k-1<q-1$, 於是 $\nu(k)<q-1$。

總集本節結果，吾人有

定理五：當 $k=0$, 或 $k=q-1$, 或 $k=\frac{q-1}{2}$ 為一整數時，$f_k(z)$ 在單位圖內無零點；在其他情形時，$f_k(z)$ 有無窮多零點，且此零點皆為代數數。

曼徹斯特大學數學系。1946 年 11 月 30 日。

註

1) 自(3),(4),(5)極易得

$$f_0(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z-z^q}{1-z}\frac{z^q-z^{q^2}}{1-z^q}\cdots\frac{zq^{\nu-1}-zq^{\nu}}{1-zq^{\nu-1}},$$

$$f_k(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1-zq^{\nu}}{1-zq^{\nu-1}}-z^{k}q^{\nu-1}\right)$$

$$(k=1,2,\cdots,q-1)。$$

當吾人討論 $f_k(z)$ 在單位圓上之性質時，此方程頗為重要。

2) Math. Ann., 101(1929),332－366。

3) 倘可證明 F (z) 非一利物威數 (Liouville number)。