Nieuw Archief voor Wiskunde (3) I, 1—15 (1953)

OVER EEN MAXIMUMPROBLEEM UIT DE REKENKUNDE

DOOR

K. MAHLER en J. POPKEN
(Manchester) (Utrecht)

Summary

On a Maximum Problem in Arithmetic

Let x be a positive number and n a positive integer. Denote by V_n the set of all expressions formed from n letters x by $n - 1$ operations of addition or multiplication. Thus V_3 consists of the four elements $x + x + x$, $(x + x)x$, $x + x.x$, and $x.x.x$. We investigate in this paper the maximum element $\mathrm{M}_n(x)$ of V_n in its dependence on both x and n. It is found that

$$\mathrm{M}_n(x) = \max_{\nu = 1, 2, \ldots, n} p_{n\nu} x^\nu$$

where

$$p_{n\nu} = \left[\frac{n}{\nu}\right]^{\nu\left(\left[\frac{n}{\nu}\right]+1\right)-n} \left(\left[\frac{n}{\nu}\right]+1\right)^{n-\nu\left[\frac{n}{\nu}\right]},$$

and that

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n(x)} = \max_{k=1,2,3,\ldots} \sqrt[k]{kx}.$$

1. *Inleiding.* In het volgende stelt x steeds een willekeurig *positief* getal voor. We beschouwen de getallen die uit een vast getal x ontstaan door uitsluitend optellingen en vermenigvuldigingen uit te voeren. Zij nu — zoals steeds in het volgende — n een willekeurig natuurlijk getal. Alle getallen, die uit x ontstaan door $(n - 1)$ maal een van de genoemde bewerkingen toe te passen, vormen een eindige verzameling V_n [1]).

V_1 bestaat blijkbaar uit het ene element x, V_2 uit $x + x$ en $x.x$, V_3 uit $x + x + x$, $x.x.x$, $(x + x)\,x$ en $x.x + x$, enz.

[1]) Equivalent hiermee is de volgende definitie:

a) V_1 bestaat uit het ene element x,

b) Voor $n \geq 2$ bestaat V_n uit alle getallen van de vorm $\mathrm{X}_\nu + \mathrm{X}_{n-\nu}$ en alle getallen van de vorm $\mathrm{X}_\nu . \mathrm{X}_{n-\nu}$, waarbij X_ν alle elementen van V_ν en $\mathrm{X}_{n-\nu}$ alle elementen van $\mathrm{V}_{n-\nu}$ doorloopt en $\nu = 1, 2, \ldots.$ n-1.

Het grootste van alle getallen, die in V_n voorkomen, zullen wij voorstellen door $M_n(x)$ of soms nog korter door M_n. Het doel van dit artikel is om $M_n(x)$ nader te bestuderen.

Triviaal zijn de volgende betrekkingen:

$M_n(x) = x^n$ *voor elke* $x \geqq 2$ *en elke* n,

$M_n(x) = nx$ *bij vaste* n *voor voldoend kleine* x,

$$0 < M_1(x) < M_2(x) < M_3(x) < \ldots\ldots$$

Afspraken: 1. Onder $[a]$ verstaan wij steeds het grootste gehele getal $\leq a$.

2. Onder (a, b) verstaan wij een interval met randpunten a en b $(a \leq b)$. Zijn a en b eindig $\neq 0$, dan tellen wij de randpunten mee; het interval $(0, b)$ daarentegen is links open.

2. Zij $n \geqq 2$. M_n is als element van V_n te schrijven als

$$X_\nu + X_{n-\nu} \text{ of als } X_\nu . X_{n-\nu},$$

waarin X_ν en $X_{n-\nu}$ elementen uit V_ν, resp. $V_{n-\nu}$ voorstellen en ν uit de rij $1, 2, \ldots, n-1$ gekozen is. Nu is

$$X_\nu = M_\nu, \quad X_{n-\nu} = M_{n-\nu},$$

daar anders uit V_n een getal gekozen kon worden dat groter was dan M_n, n.l. $\mathrm{Max}(M_\nu + M_{n-\nu}, M_\nu . M_{n-\nu})$.

Dus

$$M_n = \underset{\nu = 1, 2, \ldots, n-1}{\mathrm{Max}} (M_\nu + M_{n-\nu}, \; M_\nu . M_{n-\nu}). \tag{1}$$

Samen met

$$M_1 = x \tag{2}$$

kan deze recurrente betrekking dienen om successievelijk M_2, M_3, enz. te berekenen. Men vindt zo

$$M_2 = \begin{cases} 2x & \text{voor } 0 < x \leq 2, \\ x^2 & \text{voor } \quad 2 \leqq x, \end{cases} \tag{3}$$

en

$$M_3 = \begin{cases} 3x & \text{voor } 0 < x \leq \frac{3}{2}, \\ 2x^2 & \text{voor } \frac{3}{2} \leqq x \leq 2, \\ x^3 & \text{voor } \quad 2 \leqq x. \end{cases} \tag{4}$$

3. *Er geldt* $M_2 - M_1 \leq M_3 - M_2 \leq M_4 - M_3 \leq \ldots\ldots$

B e w ij s. Daartoe zullen wij met behulp van volledige inductie aantonen, dat

$$\mathrm{M}_{n+1} - 2\mathrm{M}_n + \mathrm{M}_{n-1} \geq 0 \textit{ voor elke } n \geq 2. \tag{5}$$

Deze ongelijkheid is n.l. voor $n = 2$ stellig juist, want uit (2), (3) en (4) volgt

$$\mathrm{M}_3 - 2\mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_1 = \begin{cases} 3x - 4x + x = 0 \textit{ voor } 0 < x \leq \frac{3}{2}, \\ 2x^2 - 4x + x \geq 0 \textit{ voor } \frac{3}{2} \leq x \leq 2, \\ x^3 - 2x^2 + x \geq 0 \textit{ voor } 2 \leq x. \end{cases}$$

Zij nu $n \geq 3$, terwijl wij aannemen, dat de ongelijkheid (5) juist is als we daarin n door een kleiner natuurlijk getal ν vervangen.

Volgens de recurrente betrekking (1) zijn er twee gevallen te onderscheiden:

a) M_n heeft de vorm $\mathrm{M}_n = \mathrm{M}_\nu + \mathrm{M}_{n-\nu}$,
b) M_n heeft de vorm $\mathrm{M}_n = \mathrm{M}_\nu \,.\, \mathrm{M}_{n-\nu}$.

In beide gevallen is $1 \leq \nu \leq n - 1$. Zonder bezwaar kunnen wij veronderstellen, dat zelfs $\nu \geq 2$ is (zo nodig wissele men M_ν en $\mathrm{M}_{n-\nu}$ om).

In het geval *a*) is $\mathrm{M}_n = \mathrm{M}_\nu + \mathrm{M}_{n-\nu}$, terwijl volgens (1) geldt

$$\mathrm{M}_{n+1} \geq \mathrm{M}_{\nu+1} + \mathrm{M}_{n-\nu},$$
$$\mathrm{M}_{n-1} \geq \mathrm{M}_{\nu-1} + \mathrm{M}_{n-\nu};$$

dus krijgen wij door optelling

$$\mathrm{M}_{n+1} - 2\mathrm{M}_n + \mathrm{M}_{n-1} \geq \mathrm{M}_{\nu+1} - 2\mathrm{M}_\nu + \mathrm{M}_{\nu-1} \geq 0.$$

In het geval *b*) is $\mathrm{M}_n = \mathrm{M}_\nu . \mathrm{M}_{n-\nu}$, terwijl

$$\mathrm{M}_{n+1} \geq \mathrm{M}_{\nu+1} . \mathrm{M}_{n-\nu}.$$
$$\mathrm{M}_{n-1} \geq \mathrm{M}_{\nu-1} . \mathrm{M}_{n-\nu};$$

dus

$$\mathrm{M}_{n+1} - 2\mathrm{M}_n + \mathrm{M}_{n-1} \geq \mathrm{M}_{n-\nu} (\mathrm{M}_{\nu+1} - 2\mathrm{M}_\nu + \mathrm{M}_{\nu-1}) \geq 0.$$

In beide gevallen *a*) en *b*) geldt dus de te bewijzen ongelijkheid ook voor n.

4. *Er bestaat een natuurlijk getal* $\mathrm{N} = \mathrm{N}(x)$, *zodat*

$$\mathrm{M}_n = \begin{cases} nx & \textit{voor } n = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}, \\ \displaystyle\max_{\nu = 1, 2, \ldots, n-1} \mathrm{M}_\nu \mathrm{M}_{n-\nu} & \textit{voor } n \geq \mathrm{N} + 1. \end{cases}$$

B e w ij s. Blijkbaar is $M_n \geqq nx$ voor elke n. Voor $n = 1$ geldt hierin zelfs het gelijkteken. Het is echter uitgesloten, dat voor een zekere vaste waarde van x en voor elke n zou gelden $M_n = nx$; immers voor elk natuurlijk getal $m > 2/x$ geldt $m^2x^2 > 2m\,x$, dus $M_{2m} > 2m\,x$. Er is dus een natuurlijk getal $N(x)$, zodat

$$M_n \begin{cases} = nx & \textit{voor } n = 1, 2, \ldots, N, \\ > nx & \textit{voor } n = N + 1. \end{cases}$$

Blijkbaar is dan $M_{N+1} > M_\nu + M_{N+1-\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$.

We zullen nu met behulp van volledige inductie bewijzen, dat voor elke $n \geqq N + 1$ geldt

$$M_n > M_\nu + M_{n-\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{6}$$

Voor $n = N + 1$ zijn deze ongelijkheden n.l. zojuist aangetoond. Zij nu (6) voor zekere $n \geqq N + 1$ reeds bewezen. Bovendien is volgens de vorige paragraaf

$$M_{n+1} - M_n \geqq M_{\nu+1} - M_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

dus volgt door optelling

$$M_{n+1} > M_{\nu+1} + M_{n-\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{7}$$

Deze laatste ongelijkheid met $\nu = n - 1$ geeft

$$M_{n+1} > M_1 + M_n, \tag{8}$$

dus volgt uit (7) en (8)

$$M_{n+1} > M_{\nu+1} + M_{n-\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1),$$

d.w.z. de ongelijkheden (6) gelden ook voor $n + 1$ in plaats van n, en dus voor elke $n \geqq N + 1$.

Wegens (1) is dus $M_n = \max\limits_{\nu = 1, 2, \ldots, n-1} M_\nu . M_{n-\nu}$ voor $n \geqq N + 1$, waarmee de bewering in de aanhef van dit nummer is aangetoond.

5. Volgens de vorige paragraaf is

$$M_n = nx \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

terwijl voor elke $n > N$ geschikt gekozen natuurlijke getallen $h_1 < n$ en $h_2 < n$ gevonden kunnen worden, zodat $M_n = M_{h_1} . M_{h_2}$ met $h_1 + h_2 = n$. Met behulp van volledige inductie zien wij in, dat M_n steeds te schrijven is als

$$M_n = M_{h_1} M_{h_2} \ldots . M_{h_s},$$

met $h_1 \leqq N$, $h_2 \leqq N$, $\ldots\ldots$, $h_s \leqq N$; $h_1 + h_2 + \ldots\ldots + h_s = n$; dus is

$$M_n = (h_1 x)\,(h_2 x)\,\ldots\ldots\,(h_s x) \text{ met } h_1 + h_2 + \ldots\ldots + h_s = n. \quad (9)$$

We denken de factoren zo gerangschikt, dat $h_1 \leqq h_2 \leqq \ldots\ldots \leqq h_s$.

We zullen nu bewijzen, dat $h_s \leqq h_1 + 1$, d.w.z. dat onder de factoren in (9) *hoogstens twee verschillende* kunnen voorkomen. Immers was daarentegen $h_s > h_1 + 1$, dan zou

$$h_1 h_s < (h_1 + 1)\,(h_s - 1) \qquad \text{zijn en dus}$$

$(h_1 x)\,(h_2 x)\,\ldots\ldots\,(h_{s-1} x)\,(h_s x) < (h_1 + 1)\,x\,(h_2 x)\,\ldots\ldots\,(h_{s-1} x)\,(h_s - 1)x$ en dus zou in V_n een getal voorkomen groter dan M_n, wat een tegenspraak oplevert.

Uit het voorgaande volgt

$$M_n = \text{Max}\,(hx)^u\,[(h+1)\,x]^v, \quad (10)$$

waarbij h, u en v alle gehele getallen doorlopen met

$$hu + (h+1)\,v = n,\ h \geqq 1,\ u \geqq 1,\ v \geqq 0. \quad (11)$$

Dit laatste resultaat kunnen wij een enigszins andere vorm geven. Laat ν de rij $1, 2, \ldots\ldots, n$ doorlopen, dan is er bij elke ν juist één oplossing van (11) met $u + v = \nu$; immers in dit geval gaat (11) over in

$$h\nu + v = n \text{ met } 0 \leqq v \leqq \nu - 1,$$

zodat

$$h = \left[\frac{n}{\nu}\right],\ v = n - \nu\left[\frac{n}{\nu}\right],\ u = \nu\left(\left[\frac{n}{\nu}\right] + 1\right) - n$$

is. Omdat uit (11) volgt $1 \leqq u + v \leqq n$, krijgen wij zo ook alle geheeltallige oplossingen van (11). Uit (10) volgt dus, als wij nog v vervangen door het symbool r,

S t e l l i n g 1. *Bij elk getal ν uit de rij $1, 2, \ldots\ldots, n$ bepalen wij de gehele getallen $h = h(n, \nu)$ en $r = r(n, \nu)$ volgens het delingsalgorithme*

$$n = h\nu + r \qquad (0 \leqq r \leqq \nu - 1).$$

Stellen wij

$$p_{n\nu} = h^{\nu - r}\,(h+1)^r, \quad (12)$$

dan is

$$M_n(x) = \max_{\nu = 1, 2, \ldots\ldots, n} p_{n\nu}\, x^\nu.$$

Een expliciete uitdrukking in n en ν voor $p_{n\nu}$ is blijkbaar

$$p_{n\nu} = \left[\frac{n}{\nu}\right]^{\nu\left(\left[\frac{n}{\nu}\right]+1\right)-n} \left(\left[\frac{n}{\nu}\right]+1\right)^{n-\nu\left[\frac{n}{\nu}\right]}.$$

In het bijzonder is $p_{n1} = n$, $p_{nn} = 1$. Met behulp van stelling 1 is de volgende tafel van coëfficiënten $p_{n\nu}$ voor $n = 1, 2, \ldots, 25$ opgesteld.

TAFEL 1

Tafel van coëfficiënten $p_{n\nu}$

n \ ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1												
2	2	1											
3	3	2	1										
4	4	4	$\underline{2}$	1									
5	5	6	4	$\underline{2}$	1								
6	6	9	8	$\underline{4}$	$\underline{2}$	1							
7	7	12	12	8	$\underline{4}$	$\underline{2}$	1						
8	8	16	18	16	$\underline{8}$	$\underline{4}$	$\underline{2}$	1					
9	9	20	27	24	16	$\underline{8}$	$\underline{4}$	$\underline{2}$	1				
10	10	25	36	36	32	$\underline{16}$	$\underline{8}$	$\underline{4}$	$\underline{2}$	1			
11	11	30	48	54	48	32	$\underline{16}$	$\underline{8}$	$\underline{4}$	$\underline{2}$	1		
12	12	36	64	81	$\underline{72}$	64	$\underline{32}$	$\underline{16}$	$\underline{8}$	$\underline{4}$	$\underline{2}$	1	
13	13	42	80	108	108	96	64	$\underline{32}$	$\underline{16}$	$\underline{8}$	$\underline{4}$	$\underline{2}$	1
14	14	49	100	144	162	$\underline{144}$	128	$\underline{64}$	$\underline{32}$	$\underline{16}$	$\underline{8}$	$\underline{4}$	$\underline{2}$
15	15	56	125	192	243	$\underline{216}$	192	128	$\underline{64}$	$\underline{32}$	$\underline{16}$	$\underline{8}$	$\underline{4}$
16	16	64	150	256	324	324	$\underline{288}$	256	$\underline{128}$	$\underline{64}$	$\underline{32}$	$\underline{16}$	$\underline{8}$
17	17	72	180	320	432	486	$\underline{432}$	384	256	$\underline{128}$	$\underline{64}$	$\underline{32}$	$\underline{16}$
18	18	81	216	400	576	729	$\underline{648}$	$\underline{576}$	512	$\underline{256}$	$\underline{128}$	$\underline{64}$	$\underline{32}$
19	19	90	252	500	768	972	972	$\underline{864}$	768	512	$\underline{256}$	$\underline{128}$	$\underline{64}$
20	20	100	294	625	1024	1296	1458	$\underline{1296}$	$\underline{1152}$	1024	$\underline{512}$	$\underline{256}$	$\underline{128}$
21	21	110	343	750	1280	1728	2187	$\underline{1944}$	$\underline{1728}$	1536	1024	$\underline{512}$	$\underline{256}$
22	22	121	392	900	1600	2304	2916	2916	$\underline{2592}$	$\underline{2304}$	2048	$\underline{1024}$	$\underline{512}$
23	23	132	448	1080	2000	3072	3888	4374	$\underline{3888}$	$\underline{3456}$	3072	2048	$\underline{1024}$
24	24	144	512	1296	2500	4096	$\underline{5184}$	6561	$\underline{5832}$	$\underline{5184}$	$\underline{4608}$	4096	$\underline{2048}$
25	25	156	576	1512	3125	5120	6912	8748	8748	$\underline{7776}$	$\underline{6912}$	6144	4096

In de formule $M_n(x) = \max\limits_{\nu=1,2,\ldots,n} p_{n\nu}\, x^\nu$ kunnen de termen $p_{n\nu}\, x^\nu$, waarvan de coëfficiënten in bovenstaande tafel onderstreept zijn, weggelaten worden (vgl. stelling 3). De coëfficiënten $p_{n\nu}$ met $n \leq 25$, $\nu \geq 14$ komen niet in de tafel voor. Deze kunnen echter alle in de formule weggelaten worden, uitgezonderd $p_{nn} = 1$.

6. We stellen

$$\lambda_0 = +\infty,\ \lambda_h = \frac{1}{h}\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots.).$$

De getallen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 9/8$, $\lambda_3 = 64/81$, ... zijn positief en naderen blijkbaar tot nul. Ze nemen bovendien monotoon af, zoals blijkt uit de betrekking

$$\lambda_{h-1} = \left(\frac{h^2}{h^2 - 1}\right)^h \lambda_h \qquad (h \geq 2) \tag{13}$$

H u l p s t e l l i n g. *Stellen we kortheidshalve*

$$x_h = \sqrt[h]{hx} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots.), \tag{14}$$

dan volgt voor $x \in (\lambda_k, \lambda_{k-1})$

$$x_1 < x_2 < \ldots. < x_{k-1} \leq x_k \geq x_{k+1} > x_{k+2} > x_{k+3} > \ldots.$$

Daarbij geldt het eerste gelijkteken alleen voor $x = \lambda_{k-1}$, *het tweede alleen voor* $x = \lambda_k$.

B e w ij s. Er geldt

$$x_h : x_{h+1} = (x\lambda_h^{-1})^{\frac{1}{h(h+1)}}. \tag{15}$$

Uit $x \geq \lambda_h$ volgt dus $x_h \geq x_{h+1}$ en het gelijkteken geldt slechts voor $x = \lambda_h$. Is nu $x \in (\lambda_k, \lambda_{k-1})$, dan is $x \geq \lambda_k$, dus $x_k \geq x_{k+1}$. Uit de monotoniteit der getallen λ_h volgt bovendien $x > \lambda_h$ voor $h = k+1, k+2, \ldots.$, dus ook $x_h > x_{h+1}$ voor deze waarden van h. Dus

$$x_k \geq x_{k+1} > x_{k+2} > \ldots.$$

terwijl het gelijkteken alleen voor $x = \lambda_k$ geldt.

Hiermee is een gedeelte van de bewering reeds aangetoond; de overblijvende ongelijkheden $x_1 < x_2 < \ldots. < x_{k-1} \leq x_k$ volgen op geheel analoge wijze uit $x \leq \lambda_{k-1}$.

7. Volgens de definitie van $p_{n\nu}$ in stelling 1 en (14) is

$$p_{n\nu}\, x^\nu = (hx)^{\nu - r}\Big((h+1)\,x\Big)^r = x_h^{h(\nu-r)}\, x_{h+1}^{(h+1)r}, \tag{16}$$

waar $h = \left[\dfrac{n}{\nu}\right]$ en r te bepalen zijn volgens het delingsalgorithme $n = h\nu + r$ $(0 \leq r \leq \nu - 1)$.

Kiezen wij x speciaal uit een vast interval $(\lambda_k, \lambda_{k-1})$, dan is volgens de hulpstelling uit het vorig nummer $x_h \leq x_k$, $x_{h+1} \leq x_k$ en dus volgens (16)

$$p_{n\nu}\, x^\nu \leq x_k^{h(\nu-r)+(h+1)r} = x_k^n \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Toepassing van stelling 1 levert dus:

Voor $x \in (\lambda_k, \lambda_{k-1})$ *is*

$$\mathrm{M}_n(x) \leq (kx)^{\frac{n}{k}}.$$

Uit (16) en (15) volgt

$$p_{n\nu}\, x^\nu = x_h^n \left(\frac{x_{h+1}}{x_h}\right)^{(h+1)r} = x_h^n \,(x^{-1}\lambda_h)^{\frac{r}{h}}. \tag{17}$$

Om nu ook een benedengrens voor de functie $\mathrm{M}_n(x)$ in het vaste interval $(\lambda_k, \lambda_{k-1})$ af te leiden, nemen wij aan dat $n \geq k^2$ is. Bij n en k bepalen wij de getallen ν en r volgens het delingsalgorithme $n = k\nu + r$ met $0 \leq r \leq k-1$. Wegens $\nu = \left[\frac{n}{k}\right] \geq k$ is echter ook $0 \leq r \leq \nu - 1$. Dus volgt uit (17) voor de hier beschouwde waarde van ν

$$p_{n\nu}\, x^\nu = x_k^n \,(x^{-1}\lambda_k)^{\frac{r}{k}}.$$

Kiezen wij $x \leq \lambda_{k-1}$, dan is dus

$$p_{n\nu}\, x^\nu \geq x_k^n \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right)^{\frac{r}{k}},$$

of wegens (13) en (14

$$p_{n\nu}\, x^\nu \geq (kx)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^r \geq (kx)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^k.$$

Dus: *Is* k *een natuurlijk getal met* $k^2 \leq n$, *dan geldt voor elke* $x \in (\lambda_k, \lambda_{k-1})$

$$(kx)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^k \leq \mathrm{M}_n(x) \leq (kx)^{\frac{n}{k}}.$$

Nu denken wij ons x vast gekozen, zodat het natuurlijk getal k bepaald is door de ongelijkheid

$$\lambda_k \leq x < \lambda_{k-1}.$$

Voor $n \geq k^2$ kunnen we nu de bovenstaande ongelijkheid toepassen en dan volgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{M}_n(x)} = \sqrt[k]{kx}$$

als $k > 1$. Voor $k = 1$ is dit resultaat echter ook juist wegens $\lambda_1 = 2$ en $M_n(x) = x^n$ voor $x \geq 2$.

Stelling 2. *Laat de functie $\theta(x)$ voor $x > 0$ gedefiniëerd worden door*

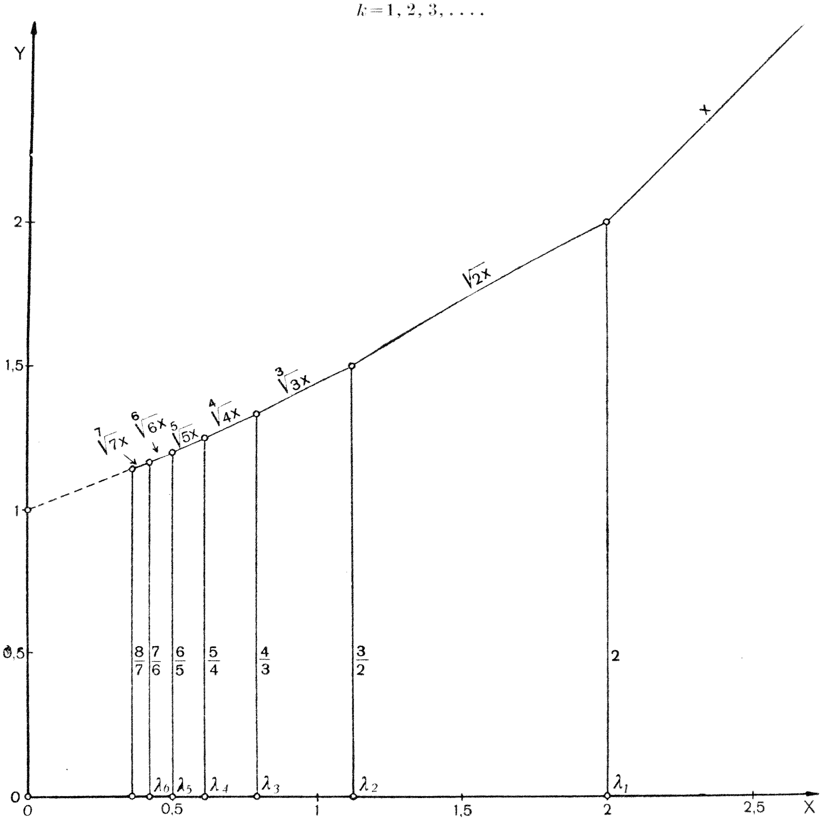
$$\theta(x) = \sqrt[k]{kx} \text{ voor } x \in (\lambda_k, \lambda_{k-1})$$

$(k = 1, 2, \ldots)$, *dan is*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{M_n(x)} = \theta(x).$$

De functie $\theta(x)$ is continu voor $x > 0$, differentiëerbaar voor elke $x > 0$ met uitzondering van de waarden $x = \lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Voor $x \to +0$ nadert $\theta(x)$ tot 1; zelfs bestaat er een rechterafgeleide voor $x = 0$, n.l. e^{-1}. De functie $\theta(x)$ kan ook gedefiniëerd worden als

$$\theta(x) = \max_{k=1,2,3,\ldots} \sqrt[k]{kx}.$$



Grafiek van de functie $\theta(x)$.

8. In tegenstelling met het voorgaande denken wij ons nu n vast gekozen, terwijl wij de grafiek $y = M_n(x)$ nader willen bestuderen. Voor het bijzonder geval $n = 8$ b.v. lezen wij uit tafel 1 af, dat de bijbehorende grafiek opgebouwd is uit delen van de parabolen

$$y = 8x,\ y = 16x^2,\ y = 18x^3,\ y = 16x^4,\ y = x^8,$$

en wel resp. voor waarden van x gekozen uit de rij van successieve intervallen

$$\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{8}{9}\right), \left(\frac{8}{9}, \frac{9}{8}\right), \left(\frac{9}{8}, 2\right), (2, +\infty).$$

Beschouwen wij nu het algemene geval.

Bij elke parabool $y = p_{n\nu}\, x^\nu$ *zullen wij het getal* $h = \left[\frac{n}{\nu}\right]$ *de rang van de parabool noemen.* Volgens (16) is zo'n parabool dus ook te schrijven als

$$y = x_k^{h(\nu - r)}\, x_{h+1}^{(h+1)r}, \tag{18}$$

waarbij r te bepalen is volgens het delingsalgorithme $n = h\nu + r$ $(0 \leq r \leq \nu - 1)$.

Wij zullen de n *parabolen uit de rij* $y = p_{n\nu}\, x^\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *in series verdelen door af te spreken, dat twee parabolen van gelijke rang in dezelfde serie komen.*

Wegens $\left[\frac{n}{1}\right] \geq \left[\frac{n}{2}\right] \geq \ldots \geq \left[\frac{n}{n}\right]$ bestaat een serie dus uit een parabool of uit een aantal, waarvan de graden telkens met 1 opklimmen. Tevens geldt blijkbaar: is ν deelbaar op n, dan heeft de parabool $y = p_{n\nu}\, x^\nu$ in zijn serie de hoogste graad. In dit geval is $r = 0$ en omgekeerd.

Wij denken ons nu alle parabolen van een bepaalde serie met rang k. Volgens (18) hebben deze alle een vergelijking van de vorm

$$y = x_k^{ks} \quad x_{k+1}^{(k+1)r} \tag{19}$$

met $s \geq 1$, $ks + (k+1)\, r = n$. Nu geven wij in het rechterlid x de waarde λ_k. Volgens de hulpstelling is dan $x_{k+1} = x_k$, zodat het rechterlid van (19) overgaat in $x_k^{ks + (k+1)r} = x_k^n$; een waarde, welke voor alle parabolen van de serie dezelfde is. Dus:

Eigenschap A: *Alle parabolen met de rang* k *gaan door eenzelfde punt* P_k *met abscis* λ_k.

Daarnaast beschouwen wij alle parabolen met rang $h \neq k$. Een dergelijke parabool heeft een vergelijking van de vorm

$$y = x_h^{hs} . x_{h+1}^{(h+1)r} \tag{20}$$

met $s \geq 1$, $hs + (h + 1)\, r = n$. We nemen voor x weer de waarde λ_k. Volgens de hulpstelling is

$$x_1 < x_2 < \ldots . < x_{k-1} < x_k = x_{k+1} > x_{k+2} > x_{k+3} > \ldots .$$

Het rechterlid van (20) is nu *kleiner* dan x_k^n; eventueel met één uitzondering, n.l.

$$h = k + 1, \ r = 0,$$

in welk geval het rechterlid ook de waarde x_k^n aanneemt. Dit uitzonderingsgeval doet zich dan en alleen dan voor als $k + 1$ een deler van n is. Dus:

E i g e n s c h a p B: *Het punt P_k ligt boven alle parabolen met rang $h \neq k$, behalve in het geval, dat n deelbaar is door $k + 1$. In dit geval gaat van de serie met rang $k + 1$ de parabool met de hoogste graad ook nog door P_k.*

Uit stelling 1 volgt dus, dat P_k stellig een punt van de kromme $y = \mathrm{M}_n(x)$ is. Wij hebben zo dus aangetoond:

E i g e n s c h a p C: *Elke parabool $y = p_{n\nu}\, x^\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots ., n)$ heeft minstens één punt met de kromme $y = \mathrm{M}_n(x)$ gemeen.*

9. Voor de verdere discussie is het voordelig om de transformatie

$$\xi = \log x, \ \eta = \log y \tag{21}$$

toe te passen. Hierdoor gaat elke parabool $y = p_{n\nu}\ x^\nu$ van de graad ν over in een rechte $\eta = \nu\xi + q_\nu$ met richtingscoëfficiënt ν. Volgens stelling 1 gaat dan de kromme $y = \mathrm{M}_n(x)$ over in

$$\eta = \underset{\nu = 1, 2, \ldots ., n}{\mathrm{Max}} (\nu\xi + q_\nu), \tag{22}$$

waarvoor wij ook zullen schrijven

$$\eta = \overline{M}_n(\xi).$$

Uit (22) leidt men gemakkelijk af:

Door de transformatie (21) gaat de kromme $y = M_n(x)$ over in een convexe gebroken lijn $\eta = \overline{M}_n(\xi)$, waarvan de opeenvolgende rechte delen gehele richtingscoëfficiënten $\nu_1, \nu_2, \ldots ., \nu_l$ hebben met $\nu_1 = 1 < < \nu_2 < \ldots . < \nu_l = n$.

Elk van die rechte delen heeft een vergelijking

$$\eta = \nu_\lambda \xi + q_{\nu_\lambda} \qquad \left(\xi \in (\xi_{\lambda-1},\ \xi_\lambda)\right)$$

en correspondeert met een segment van de parabool $y = p_{n\nu_\lambda}\, x^{\nu_\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, \mathrm{l}$) in het xy vlak. Zo vindt men:

De kromme $y = M_n(x)$ is opgebouwd uit aan elkaar grenzende segmenten van parabolen $y = p_{n\nu_\lambda}\, x^{\nu_\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, \mathrm{l}$). Doorloopt men de kromme van links naar rechts, dan neemt de graad van de betreffende parabolen monotoon toe.

Beschouw nu een punt, waar twee paraboolsegmenten aan elkaar grenzen. Voor de betreffende x-coördinaat is $\mathrm{M}_n'(x)$ discontinu, zoals direct blijkt door de afgeleide van $\overline{M}_n(\xi)$ te bekijken. In de volgende tafel zijn deze discontinuïteitspunten voor $n = 1, 2, \ldots, 25$ aangegeven. Zonder bewijs vermelden wij de stelling, *dat alle discontinuïteitspunten van $\mathrm{M}_n'(x)$ rationale getallen zijn.*

$n =$ 1: —
2: λ_1
3: 3/2, λ_1
4: 1, λ_1
5: 5/6, 3/2, λ_1
6: 2/3, λ_2, λ_1
7: 7/12, 1, 3/2, λ_1
8: 1/2, 8/9, λ_2, λ_1
9: 9/20, 20/27, λ_2, 3/2, λ_1
10: 2/5, 25/36, 1, λ_2, λ_1
11: 11/30, 5/8, 8/9, λ_2, 3/2, λ_1
12: 1/3, 9/16, λ_3, λ_2, λ_1
13: 13/42, 21/40, 20/27, 1, λ_2, 3/2, λ_1
14: 2/7, 49/100, 25/36, 8/9, λ_2, λ_1
15: 15/56, 56/125, 125/192, λ_3, λ_2, 3/2, λ_1
16: 1/4, 32/75, 75/128, λ_3, 1, λ_2, λ_1
17: 17/72, 2/5, 9/16, 20/27, 8/9, λ_2, 3/2, λ_1
18: 2/9, 3/8, 27/50, 25/36, λ_3, λ_2, λ_1
19: 19/90, 5/14, 63/125, 125/192, λ_3, 1, λ_2, 3/2, λ_1
20: 1/5, 50/147, 294/625, λ_4, λ_3, 8/9, λ_2, λ_1
21: 21/110, 110/343, 343/750, 75/128, 20/27, λ_3, λ_2,
22: 22/121, 121/392, 98/225, 9/16, 25/36, λ_3, 1, λ_2, λ_1
23: 23/132, 33/112, 56/135, 27/50, 125/192, λ_3, 8/9, λ_2, 3/2, λ_1
24: 1/6, 9/32, 32/81, 324/625, λ_4, λ_3, λ_2, λ_1
25: 25/156, 13/48, 8/21, 1512/3125, λ_4, 20/27, λ_3, 1, λ_2, 3/2, λ_1

$$\lambda_k = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \frac{9}{8},\ \lambda_3 = \frac{64}{81}, \ldots$$

TAFEL 2

Discontinuïteitspunten van de functie $\mathrm{M}_n'(x)$ voor $n = 1, 2, \ldots, 25$.

Wij willen nu nagaan uit welke parabolen de kromme $y = \mathrm{M}_n(x)$ opgebouwd is, m.a.w. welke getallen 1, 2, ..., n in de rij ν_1, ν_2, ..., ν_l voorkomen en welke niet.

Wij hebben gezien, dat elke parabool $y = p_{n\nu}\, x^\nu$ correspondeert met een rechte $\eta = \nu\xi + q_\nu$ met richtingscoëfficiënt ν ($\nu = 1$, 2, ..., n). Wij hadden verder het getal $h = \left[\frac{n}{\nu}\right]$ de rang van de parabool genoemd. Wij zullen dit laatste getal ook de rang van de overeenkomstige rechte noemen. Evenals de parabolen worden ook de rechten met dezelfde rang in eenzelfde serie geplaatst.

Nu passen wij de resultaten uit **8.** toe. Het punt P_k uit eigenschap A wordt door de transformatie (21) overgevoerd in een punt π_k van het $\xi\eta$-vlak. Alle rechten van de serie met rang k (zo zulke rechten er zijn) gaan door het punt π_k. Is $k + 1$ geen deler van n, dan ligt π_k volgens eigenschap B boven alle rechten, die niet tot de serie behoren. Wegens (22) volgt hieruit, dat π_k een punt van de gebroken lijn $\eta = \overline{M}_n(\xi)$ is. Verder, dat zowel de rechte met de laagste als die met de hoogste richtingscoëfficiënt uit de serie een werkelijke bijdrage tot de gebroken lijn $\eta = \overline{M}_n(\xi)$ levert (de eerste voor waarden van $\xi <$ abscis van π_k, de tweede voor waarden van $\xi >$ abscis van π_k). π_k is dus een hoekpunt van de gebroken lijn. De overige rechten van de serie hebben afgezien van π_k geen enkel punt met de gebroken lijn gemeen.

Is $k + 1$ wel een deler van n, dan wordt de situatie in zoverre anders, dat nu de rechte met laagste richtingscoëfficiënt uit de serie niet langer een werkelijke bijdrage tot de gebroken lijn levert, maar dat haar rol wordt overgenomen door de laatste rechte van de serie met rang $k + 1$ (welke immers volgens eigenschap B in dit geval ook door π_k gaat). Zo komen wij tot:

S t e l l i n g 3. *Van elke serie parabolen met rang k levert de parabool met hoogste graad altijd een werkelijke bijdrage tot de kromme* $y = M_n(x)$. *Is het aantal parabolen van een serie minstens twee, dan geeft de parabool met de laagste graad dan en alleen dan een bijdrage als* $k + 1$ *geen deler van n is.*

De overige parabolen van de serie hebben slechts één punt met de grafiek gemeen.

Met behulp van deze stelling is tafel 1 opgesteld. Als voorbeeld lichten we nu een gedeelte uit deze tafel en geven onder elke $p_{n\nu}$ de rang aan.

n \ ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
10	10	25	36	36	32	*16*	*8*	*4*	*2*	1			
	10	*5*	*3*	*2*	*2*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*			
11	11	30	48	54	48	32	*16*	*8*	*4*	*2*	1		
	11	*5*	*3*	*2*	*2*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*		
12	12	36	64	81	*72*	64	*32*	*16*	*8*	*4*	*2*	1	
	12	*6*	*4*	*3*	*2*	*2*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	
13	13	42	80	108	108	96	64	*32*	*16*	*8*	*4*	*2*	1
	13	*6*	*4*	*3*	*2*	*2*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
14	14	49	100	144	162	*144*	128	*64*	*32*	*16*	*8*	*4*	*2*
	14	*7*	*4*	*3*	*2*	*2*	*2*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

TAFEL 3

De grote cijfers geven een aantal coëfficiënten $p_{n\nu}$, de eronder geplaatste kleine cijfers de bijbehorende rang.

10. Tot slot zullen wij, althans voor bepaalde intervallen $(\lambda_k, \lambda_{k-1})$ de functie $M_n(x)$ expliciet aangeven.

Stelling 4. *Laat k en $k-1$ beide in de getallenrij* $\left[\frac{n}{1}\right]$, $\left[\frac{n}{2}\right], \ldots, \left[\frac{n}{n}\right]$ *voorkomen. Bij n en k bepalen wij de getallen ν en r volgens het delingsalgorithme*

$$n = k\nu + r \qquad (0 \leq r \leq k-1) \tag{23}$$

en ter afkorting stellen wij

$$\lambda_{kr} = \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^r \lambda_{k-1}.$$

Dan is

$$M_n(x) = \begin{cases} p_{n\nu}\, x^\nu & \textit{voor } x \in (\lambda_k, \lambda_{kr}) \\ p_{n,\nu+1}\, x^{\nu+1} & \textit{voor } x \in (\lambda_{kr}, \lambda_{k-1}) \end{cases}$$

Opmerkingen. 1. De voorwaarde, dat k en $k-1$ beide in de genoemde getallenrij voorkomen is b.v. vervuld als $n \geq k^2 \geq 4$ is.

2. Uit $0 \leq r \leq k-1$ en (13) volgt $\lambda_k < \lambda_{kr} \leq \lambda_{k-1}$.

Bewijs. Omdat k en $k-1$ beide in de genoemde getallenrij optreden zijn er parabolen zowel van de rang k als van de rang

$k - 1$. De parabolen met rang k gaan volgens eigenschap A door P_k, die met rang $k-1$ door P_{k-1}. De hoogste graad van de parabolen met rang k zij ν; de bijbehorende parabool is $y = p_{n\nu}\, x^\nu$. De parabool met rang $k - 1$ van de laagste graad is dan $y = p_{n,\,\nu+1}\, x^{\nu+1}$. Beschouwingen als die in het vorige nummer leiden dan tot

$$M_n(x) = \mathrm{Max}\,(p_{n\nu}\, x^\nu,\, p_{n,\,\nu+1}\, x^{\nu+1}) \tag{24}$$

voor $x \in (\lambda_k, \lambda_{k-1})$.

Nu is $\left[\dfrac{n}{\nu}\right] = k$, $\left[\dfrac{n}{\nu+1}\right] = k - 1$. Bepalen wij het getal r volgens het delingsalgorithme $n = k\nu + r$ met $0 \leqq r \leqq \nu - 1$, dan is automatisch $r \leqq k - 1$, daar anders uit $n = k(\nu + 1) + r - k$ zou volgen $\left[\dfrac{n}{\nu+1}\right] \geqq k$. De zo ingevoerde getallen ν en r voldoen dus aan (23).

Volgens (12) is

$$p_{n\nu} = k^{\nu-r}\,(k + 1)^r$$

en, in verband met $n = (k - 1)\,(\nu + 1) + r - k + \nu + 1$,

$$p_{n,\,\nu+1} = (k - 1)^{k-r}\, k^{r-k+\nu+1}.$$

Hieruit volgt gemakkelijk

$$p_{n\nu} : p_{n,\,\nu+1} = \lambda_{kr},$$

zodat de bewering uit (24) blijkt.

(Ingekomen 25.9.52).