MAHLER, K.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 25—33 (1956)

Über die konvexen Körper, die sich einem Sternkörper einbeschreiben lassen

Von
KURT MAHLER

Bezeichnungen (für nähere Einzelheiten s. den Enzyklopädie-Artikel Nr. 27 von KELLER):

R_n ist der affine Raum aller Punkte oder Vektoren $X=(x_1, \ldots, x_n)$ mit reellen $x_1, \ldots, x_n$. Sind $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ irgend n linear-unabhängige Punkte in R_n, so bedeute $\{X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}\}$ ihre Determinante. Diese Punkte erzeugen ein Gitter Λ, welches aus allen $u_1 X^{(1)} + \cdots + u_n X^{(n)}$ mit ganzen $u_1, \ldots, u_n$ besteht und die Determinante $d(\Lambda) = |\{X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}\}|$ hat. Ist S eine beliebige Punktmenge in R_n, so heißt Λ S-zulässig falls, außer vielleicht dem Ursprung $O=(0, \ldots, 0)$, kein Punkt von Λ innerer Punkt von S ist. Unter der Gitterdeterminante $\Delta(S)$ von S ist alsdann die untere Grenze von $d(\Lambda)$, erstreckt über alle S-zulässigen Gitter, verstanden. Ein S-zulässiges Gitter Λ mit $d(\Lambda) = \Delta(S)$ heißt ein kritisches Gitter von S.

Die Punktmenge S ist ein Strahlenkörper, falls O innerer Punkt ist und falls ferner für $X \in S$ und $-1 < t < 1$ auch tX zu S gehört. Ist für $X \in S$ und $-1 < t < 1$ sogar tX ein innerer Punkt von S, so heißt S ein Sternkörper.

Sei $n \geq 2$, S ein beschränkter Sternkörper[1]) in R_n, und K ein S einbeschriebener konvexer Körper von größtmöglichem Inhalt $V(K)$. (Mit Hilfe des Satzes von BLASCHKE über Folgen konvexer Körper zeigt man leicht die Existenz eines solchen Körpers K.) Man kann die Frage aufwerfen, ob es eine nicht-triviale positive untere Schranke für $V(K)$ gibt, die allein von einem geeigneten Funktional von S abhängt.

Es ist leicht einzusehen, daß eine solche Schranke für $V(K)$ nicht nur von dem Inhalt $V(S)$ von S abhängen kann. Denn sei z. B. S_r der endliche Sternkörper

$$S_r\colon \quad |x_1 x_2 \ldots x_n| \leq 1, \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2,$$

welcher in dem unendlichen Sternkörper

$$S_\infty\colon \quad |x_1 x_2 \ldots x_n| \leq 1$$

enthalten ist. Es ist wohlbekannt, daß S_∞ zwar eine endliche Gitterdeterminante $\Delta(S_\infty)$ hat, daß aber sein Volumen $V(S_\infty)$ unendlich groß ist. Man kann daher ein $r \geq n$ so auswählen, daß

$$V(S_r) \text{ beliebig groß, aber } \tfrac{1}{2}\Delta(S_\infty) \leq \Delta(S_r) \leq \Delta(S_\infty)$$

[1]) Alle auftretenden konvexen Körper, Sternkörper und Strahlenkörper werden als symmetrisch in bezug auf den Ursprung $O=(0, \ldots, 0)$ angenommen, es sei denn ausdrücklich das Gegenteil gesagt.

ist. Nun ist offenbar der konvexe Körper

$$K_0:\quad |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leq n$$

vom Inhalt

$$V(K_0) = \frac{(2n)^n}{n!}$$

eine Teilmenge von S_r und stellt zugleich den größten konvexen Körper dieser Art dar. Für diesen Körper kann $V(K_0)/V(S_r)$ beliebig klein gemacht werden; dagegen bleibt $V(K_0)/\Delta(S_r)$ für alle $r \geq n$ größer als eine gewisse, nur von n abhängige positive Zahl.

Dieses Beispiel legt die Vermutung nahe, daß man auch im allgemeinen Falle $V(K)$ mit $\Delta(S)$ vergleichen muß und daß immer $V(K)/\Delta(S) \geq c$ ist, wo die Konstante $c > 0$ nur von n abhängt. Merkwürdigerweise ist diese Vermutung jedoch falsch und gilt das folgende Ergebnis:

Satz. *Sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Dann gibt es einen beschränkten Sternkörper S in R_n mit der Eigenschaft $V(K) < \varepsilon\Delta(S)$ für jeden in S enthaltenen konvexen Körper K.*

Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Zuerst wird ein Strahlenkörper Σ^* konstruiert, welcher der Ungleichung

$$\text{(a)}\qquad V(K) < \frac{\varepsilon}{2}\Delta(\Sigma^*)$$

für jeden konvexen Körper $K \subseteqq \Sigma^*$ genügt. Danach wird in Σ^* ein Sternkörper S mit der Eigenschaft

$$\text{(b)}\qquad \Delta(S) > \tfrac{1}{2}\Delta(\Sigma^*)$$

einbeschrieben. Da aus $K \subseteqq S$ auch $K \subseteqq \Sigma^*$ folgt, so ist die Behauptung eine unmittelbare Folge von (a) und (b).

1. Der Mengenlehre entnehmen wir ohne Beweis den folgenden Hilfssatz:

Lemma 1. *Es gibt eine unendliche Menge M reeller Zahlen, welche überall auf der reellen Achse dicht ist, derart, daß die Elemente jeder endlichen Teilmenge von M algebraisch unabhängig über dem Körper der rationalen Zahlen sind.*

2. Wir bezeichnen mit $\delta > 0$ eine beliebig kleine und mit $r > 1$ eine beliebig große Zahl, weiter mit

$$G_\varrho:\quad |X| \leq \varrho \qquad \text{und} \qquad \Gamma_\varrho:\quad |X| = \varrho$$

die Kugel vom Radius $\varrho > 0$ mit Mittelpunkt im Ursprung und ihre Oberfläche. Dabei bedeutet $|X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ die Länge des Ortsvektors $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Im Falle der Einheitskugel lassen wir den Index 1 weg und schreiben G und Γ anstatt G_1 und Γ_1.

Durch jeden Punkt $X \neq O$ geht genau eine Gerade $L(X)$, welche den Ursprung enthält; sie besteht aus allen Punkten $P = tX$ mit reellem t. Diese Gerade schneidet Γ in zwei Punkten $+Q(X)$ und $-Q(X)$, die in bezug auf O

symmetrisch liegen. Die Bezeichnung kann eindeutig gemacht werden, indem man etwa für $+Q(X)$ den Punkt mit positivem t nimmt.

Aus Lemma 1 ergibt sich nun, daß man eine genügend große natürliche Zahl N und dazu N Punkte

$$X_h = (x_{h1}, x_{h2}, \ldots, x_{hn}) \qquad (h = 1, 2, \ldots, N)$$

derart auswählen kann, daß die folgenden Forderungen erfüllt sind:

(1) Die nN Koordinaten x_{hk} der Punkte X_h sind verschiedene Elemente der Menge M; sie sind daher algebraisch unabhängig über dem rationalen Zahlkörper.

(2) Jeder Punkt von Γ hat eine Entfernung kleiner als δ von wenigstens *einem der* $2N$ *Punkte*

$$Q_h = +Q(X_h) \quad \textit{und} \quad -Q_h = -Q(X_h) \qquad (h = 1, 2, \ldots, N)$$

auf Γ [2]).

Es bedeute jetzt Σ die Menge aller Punkte X der Kugel G_r, die nicht von der Form

$$X = \pm t\, Q_h \quad \text{mit} \quad 1 \leq t \leq r \qquad (h = 1, 2, \ldots, N)$$

sind; Σ entsteht also aus G_r indem man $2N$ Strecken der Länge $r-1$ fortläßt. Natürlich ist Σ kein Sternkörper; es ist jedoch ein Strahlenkörper. Denn wenn X zu Σ gehört, so gilt dasselbe für alle Punkte sX mit $-1 \leq s \leq +1$. Die Kugel G_ϱ ist für $\varrho < 1$, aber nicht für $\varrho \geq 1$ in Σ enthalten, und Σ liegt seinerseits in G_r.

3. Lemma 2. *Es gibt eine Zahl $c_1 > 0$, die nur von n abhängt, so daß*

$$V(K) < c_1 \max(1, \delta r^{n-1})$$

für jeden in Σ enthaltenen konvexen Körper K ist.

Beweis. Sei X_0 ein Punkt von K, für den $|X_0| = \xi > 0$ ein Maximum ist. Im Falle $\xi \leq 2$ gilt die Ungleichung

$$V(K) \leq V(G_2),$$

da alsdann $K \subseteq G_2$ ist. Sei von nun an

$$\xi > 2.$$

Eine Rotation des Koordinatensystems hat keinen Einfluß auf die Behauptung. Wir dürfen daher ohne Verlust der Allgemeinheit annehmen, daß X_0 die Koordinaten

$$X_0 = (0, 0, \ldots, \xi)$$

hat.

[2]) Zwei Punkte X und Y in R_n haben die Entfernung $|X - Y|$.

Weiter bedeute K den Durchschnitt von K mit der Koordinatenebene $x_n = 0$; K ist also ein $(n-1)$-dimensionaler konvexer Körper. Es gibt einen Punkt

$$\Xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$$

auf der Begrenzung von K mit kleinster Entfernung

$$d = |\Xi| > 0$$

von O. Die $(n-1)$-dimensionale Kugel

$$\varkappa: \quad |X| \leqq d, \; x_n = 0,$$

in der Ebene $x_n = 0$ ist daher in K und so auch in K enthalten.

Wir konstruieren nun zwei Doppelkegel Φ und φ mit den Spitzen $+X_0$ und $-X_0$ bzw. über der Basis K und der Basis $\varkappa$. Diese zwei Körper Φ und φ sind wieder symmetrisch in bezug auf O und konvex, und es ist offenbar $\varphi \leqq \Phi \leqq K$.

Wie schon erwähnt, ist G nicht in K, also auch nicht in φ enthalten. Da nun O innerhalb, X_0 aber außerhalb von G liegt, so enthält der Durchschnitt von φ mit dem Teil von Γ, der im Halbraum $x_n \geqq 0$ liegt, eine größte Kugelkappe P mit Mittelpunkt im Punkte $X^* = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Diese Kugelkappe P besteht aus allen Punkten $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ auf Γ mit der Eigenschaft

$$\eta \leqq x_n \leqq 1;$$

dabei bedeutet η eine gewisse Zahl mit $0 \leqq \eta < 1$. Daher kann P auch als die Menge aller Punkte X auf Γ mit

$$|X - X^*| \leqq \sqrt{2(1-\eta)}$$

aufgefaßt werden. Andererseits liegt X^* von wenigstens einem der Punkte $\mp Q_k$ in einer Entfernung kleiner als δ, und kein Punkt $\mp Q_k$ kann zu P gehören. Daher muß

$$\sqrt{2(1-\eta)} < \delta, \qquad \text{d.h.} \qquad \eta > 1 - \frac{\delta^2}{2}$$

sein.

Indem wir nun den Rand von P von dem Punkte X_0 aus auf die Ebene x_n projizieren, erhalten wir die Proportion

$$d : \sqrt{1-\eta^2} = \xi : (\xi - \eta).$$

Hier ist

$$\sqrt{1-\eta^2} < \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)^2} < \delta \quad \text{und} \quad \xi > 2, \; \eta \leqq 1, \; \xi - \eta > \frac{1}{2}\xi, \; \frac{\xi}{\xi - \eta} < 2$$

und daher schließlich

$$d : \delta < 2 : 1, \; d < 2\delta.$$

In den beiden Punkten Ξ und $-\Xi$ bringen wir nun ein Paar paralleler Stützebenen von K an. Diese Stützebenen begrenzen einen Parallelstreifen der Dicke

$$\leq |\Xi - (-\Xi)| = 2d < 4\delta,$$

in welchem K enthalten ist. Da andrerseits K auch eine Teilmenge der Kugel G_r ist, so liegt K vollständig in einem Zylinder der Höhe 4δ und mit einem Querschnitt vom $(n-1)$-dimensionalen Inhalt

$$c_2 r^{n-1};$$

c_2 bezeichnet hier den Inhalt der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel. Also ergibt sich die Abschätzung

$$V(K) < 4\delta \cdot c_2 r^{n-1}$$

und damit die Behauptung, falls

$$c_1 = \max(V(G_2), 4c_2)$$

gewählt wird.

4. Sei Λ ein beliebiges Σ-zulässiges n-dimensionales Gitter. Eine gewisse (möglicherweise verschwindende) Anzahl von primitiven Punkten dieses Gitters[3]) liegt im Innern von G_r; seien das genau die Punkte $\mp Y_1, \mp Y_2, \ldots, \mp Y_p$. Die Vorzeichen lassen sich so wählen, daß es zu jedem dieser Gitterpunkte Y_h einen eindeutig bestimmten Index $j = j(h)$ gibt, derart daß

$$Y_h = s_h Q_j \quad \text{und} \quad 1 \leq s_h < r$$

ist; denn Punkte nicht von dieser Form im Innern von G_r liegen auch im Innern von Σ. Verschiedenen Punkten Y_h und Y_k kann offenbar nicht derselbe Index j entsprechen. Es läßt sich daher die Bezeichnung ohne Beschränkung der Allgemeinheit so umändern, daß gerade

$$Y_h = s_h Q_h \quad \text{und} \quad 1 \leq s_h < r \qquad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

ist. Nach der Definition von Q_h läßt sich alsdann Y_h auch in der Form

$$Y_h = t_h X_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, p) \tag{3}$$

darstellen, wo jetzt $t_1, t_2, \ldots, t_p$ gewisse von Null verschiedene reelle Zahlen sind.

5. Von den p Gitterpunkten $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ seien genau q linear unabhängig, etwa die Punkte $Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$; dabei ist natürlich

$$q \leq \min(n, N, p).$$

[3]) $Y \in \Lambda$ heißt primitiv, falls $Y \neq O$ ist und es keinen Gitterpunkt der Form tY mit $0 < t < 1$ gibt.

Falls $q < p$ ist, lassen sich die $p - q$ übrigen Punkte $Y_{q+1}, Y_{q+2}, \ldots, Y_p$ durch diese Basis in der Form

$$Y_h = \lambda_{h1} Y_1 + \lambda_{h2} Y_2 + \cdots + \lambda_{hq} Y_q \qquad (h = q+1, q+2, \ldots, p)$$

ausdrücken. Dabei sind die Koeffizienten λ_{hk} gewisse rationale Zahlen, und wegen $Y_h \neq O$ sind $\lambda_{h1}, \lambda_{h2}, \ldots, \lambda_{hq}$ für keinen Index h alle gleichzeitig Null.

Aus (3) folgen nun die äquivalenten Beziehungen

$$t_h X_h = \lambda_{h1} t_1 X_1 + \lambda_{h2} t_2 X_2 + \cdots + \lambda_{hq} t_q X_q \qquad (h = q+1,\ q+2, \ldots, p).$$

Nachdem hier die Koordinaten

$$X_h = (x_{h1}, x_{h2}, \ldots, x_{hn})$$

eingesetzt worden sind, erhalten wir daher das System von $n(p-q)$ homogenen linearen Gleichungen

$$(4) \qquad t_h x_{hk} = \lambda_{h1} t_1 x_{1k} + \lambda_{h2} t_2 x_{2k} + \cdots + \lambda_{hq} t_q x_{qk} \qquad \begin{pmatrix} h = q+1, & q+2, & \ldots, & p \\ k = 1, & 2, & \ldots, & n \end{pmatrix}$$

für die p Größen $t_h \neq 0$.

Lemma 3. *Es ist entweder* $q = p$ *oder* $q = p - 1$.

Beweis. Sei die Behauptung falsch und daher $q \leqq p - 2$, so daß die Gln. (4) wenigstens für $h = q+1$ und $h = q+2$ erfüllt sind. Keiner der hier auftretenden Koeffizienten

$$\lambda_{hk} \qquad (h = q+1, q+2;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

kann gleich Null sein. Denn sei etwa $1 \leqq \nu < n$ und

$$\lambda_{q+1,k} \neq 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, \nu; \qquad \lambda_{q+1,k} = 0 \quad \text{für} \quad k = \nu+1, \nu+2, \ldots, n.$$

Die $\nu + 1$ aus (4) entspringenden Gleichungen

$$t_{q+1} x_{q+1,k} = \lambda_{q+1,1} t_1 x_{1k} + \lambda_{q+1,2} t_2 x_{2k} + \cdots + \lambda_{q+1,\nu} t_\nu x_{\nu k} \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu+1)$$

für die nicht-verschwindenden Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_\nu, t_{q+1}$ verlangen, daß ihre Determinante

$$\left| x_{q+1,k}, \lambda_{q+1,1} x_{1k}, \lambda_{q+1,2} x_{2k}, \ldots, \lambda_{q+1,\nu} x_{\nu k} \right|_{k=1,2,\ldots,\nu+1}$$

gleich Null ist. Aber dann sind, gegen die Voraussetzung, nicht alle nN Koordinaten x_{hk} algebraisch unabhängig über dem rationalen Körper.

Für die Werte $h = q+1$ und $h = q+2$ erhalten wir also aus (4) ein System von $2n$ homogenen linearen Gleichungen für die $q+2$ Größen $t_1, t_2, \ldots, t_{q+2}$, die wieder alle von Null verschieden sind. Wegen $n \geqq 2$ und $q \leqq n$ ist jedoch $2n \geqq q+2$. Die Koeffizientenmatrix hat daher höchstens den Rang $q+1$, und es ergibt sich erneut der Widerspruch, daß die in ihr auftretenden Koordinaten x_{hk} einer nicht-trivialen algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügen.

6. Lemma 4. *Es gibt eine nur von n abhängige Konstante $c_3 > 0$, derart, daß*

$$\Delta(\Sigma) \geqq c_3 r^{n-1}.$$

Beweis. Nach dem letzten Hilfssatz kann, von einem Proportionalitätsfaktor abgesehen, höchstens eine Gleichung

$$\varkappa_h Y_h + \varkappa_k Y_k + \varkappa_l Y_l = O$$

mit von Null verschiedenen rationalen Koeffizienten gelten; dabei sind h, k, l irgend drei verschiedene der Indizes $1, 2, \ldots, p$. Demnach ist für $h \neq k$ immer nur höchstens einer der beiden Gitterpunkte $Y_h + Y_k$ und $Y_h - Y_k$ zu einem weiteren Gitterpunkt Y proportional. Nach der Definition dieser Punkte bedeutet dies, daß höchstens einer der beiden Punkte $Y_h + Y_k$ und $Y_h - Y_k$ im Innern von G_r liegen kann. Anders ausgedrückt, es muß wenigstens eine der beiden Ungleichungen

$$|Y_h + Y_k| \geqq r \quad \text{oder} \quad |Y_h - Y_k| \geqq r$$

gelten.

Sei jetzt etwa

$$|Y_1| = \min(|Y_1|, |Y_2|, \ldots, |Y_p|).$$

Es folgt dann für $h = 2, 3, \ldots, p$, daß

$$r \leqq |Y_1 \pm Y_h| \leqq |Y_1| + |Y_h| \leqq 2|Y_h|, \qquad |Y_h| \geqq \frac{r}{2}.$$

Bedeute jetzt E das Rotationsellipsoid in R_n mit einer Halbachse der Länge 1 in der Richtung OY_1, und mit $n-1$ Halbachsen der Länge $r/2$ in Richtungen senkrecht zu OE_1. Das Innere von E enthält dann keinen der Punkte $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ und folglich überhaupt keinen von O verschiedenen Punkt von Λ; d.h., Λ ist E-zulässig. Es ist also

$$d(\Lambda) \geqq \Delta(E),$$

und da dies für jedes Σ-zulässige Gitter gilt, so ist auch

$$\Delta(\Sigma) \geqq \Delta(E).$$

Das Ellipsoid E hat den Inhalt

$$V(E) = c_4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^{n-1},$$

wobei $c_4 = V(G)$ gesetzt wurde. Nach Minkowskis Gitterpunktssatz ist andrerseits

$$\Delta(E) \geqq 2^{-n} V(E) = c_4\, 2^{-(2n-1)} r^{n-1}.$$

Also erhalten wir die Ungleichung

$$\Delta(\Sigma) \geqq c_4\, 2^{-(2n-1)} r^{n-1}$$

und damit die Behauptung, falls $c_3 = c_4\, 2^{-(2n-1)}$ gesetzt wird.

7. Aus Lemma 2 und 4 ergibt sich nun für jeden in Σ enthaltenen konvexen Körper K, daß

$$\frac{V(K)}{\varDelta(\Sigma)} < \frac{c_1 \max(1, \delta r^{n-1})}{c_3 r^{n-1}} = \frac{c_1}{c_3} \max(r^{-(n-1)}, \delta)$$

ist. Genügen also δ und r den Bedingungen

$$\frac{c_1}{c_3} \delta < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \frac{c_1}{c_3} r^{-(n-1)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

so folgt die Ungleichung

$$V(K) < \frac{\varepsilon}{2} \varDelta(\Sigma). \tag{5}$$

Es ist jetzt zweckmäßig, Σ durch einen neuen Strahlenkörper Σ^* zu ersetzen; man erhält diesen, indem man zu Σ die $2N$ Punkte $\mp Q_1, \mp Q_2, \ldots, \mp Q_N$ hinzufügt. Ein Σ-zulässiges Gitter ist offenbar auch Σ^*-zulässig, und umgekehrt; darum gilt

$$\varDelta(\Sigma^*) = \varDelta(\Sigma).$$

Ist ferner K^* irgendein Σ^* einbeschriebener konvexer Körper und liegt ein zweiter konvexer Körper K ganz im Innern von K^*, so ist K auch im Innern von Σ enthalten. Es folgt daher leicht, daß die Ungleichung (5) bestehenbleibt, falls in ihr Σ durch Σ^* ersetzt wird. Also erfüllt Σ^* die Forderung (a) der Einleitung.

8. Sei $\sigma > 0$ eine sehr kleine Zahl, und bedeute T_h die Menge aller Punkte X der Form

$$X = s\,Q_h + (s-1)\,\sigma\, Y, \text{ wo } s > 1 \text{ und } |Y| < 1$$

ist; T_h stellt also einen offenen Kegel mit der Spitze Q_h dar. Weiter sei $-T_h$ die zu T_h in bezug auf O symmetrische Menge. Endlich bezeichne S_σ die Menge, welche aus allen Punkten X der Form

$$|X| \leq r,\ X \notin \mp T_h \qquad \text{für} \qquad h = 1, 2, \ldots, N$$

besteht. Offenbar ist S_σ eine abgeschlossene Menge und ein Sternkörper.

Aus der Definition ergibt sich sofort, daß $S_\sigma \leqq \Sigma^*$ und für $\sigma < \tau$ auch $S_\sigma \geqq S_\tau$ ist. Dies zieht für die Gitterdeterminante die Ungleichungen

$$\varDelta(S_\tau) \leq \varDelta(S_\sigma) \leq \varDelta(\Sigma^*) \qquad \text{für} \qquad 0 < \sigma < \tau$$

nach sich. Wenn also σ gegen Null strebt, so wächst $\varDelta(S_\sigma)$ monoton gegen einen Grenzwert, der nicht größer als $\varDelta(\Sigma^*)$ sein kann.

In der Tat ist sogar

$$\lim_{\sigma \to +0} \varDelta(S_\sigma) = \varDelta(\Sigma^*).$$

Denn für jede natürliche Zahl k können wir ein $S_{1/k}$-zulässiges Gitter Λ_k so auswählen, daß

$$d(\Lambda_k) < \varDelta(S_{1/k}) + \frac{1}{k}$$

ist. Die Gitterfolge $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \ldots\}$ ist offenbar beschränkt, enthält also eine konvergente Teilfolge $\{\Lambda_{k_1}, \Lambda_{k_2}, \Lambda_{k_3}, \ldots\}$, die etwa gegen das Gitter Λ_0 strebt. Dieses Gitter Λ_0 ist nun Σ^*-zulässig. Denn andernfalls gibt es in Σ^* einen inneren Punkt $Z_0 \neq 0$ nit $Z_0 \in \Lambda_0$. Alsdann besitzt Λ_{k_i} für alle genügend großen i einen Punkt in einer festen, beliebig kleinen Umgebung von Z_0. Dieser Punkt ist offenbar ein innerer, von O verschiedener Punkt von S_{1/k_i}, so daß sich ein Widerspruch ergibt.

Da somit $\Delta(S_\sigma)$ gegen $\Delta(\Sigma^*)$ strebt, so gibt es einen Wert $\sigma = \sigma_0$, derart, daß

$$\Delta(S_{\sigma_0}) < \tfrac{1}{2}\Delta(\Sigma^*)$$

ist. Der Sternkörper $S = S_{\sigma_0}$ erfüllt also die in der Einleitung gestellte Bedingung (b).

Mathematics Department, The University, Manchester, England

(Eingegangen am 8. März 1956)