KÜLÖNLENYOMAT

MATEMATIKAI LAPOK

23. ÉVFOLYAM 1–2. SZÁMÁBÓL

Kurt Mahler

Transzcendens számok II.

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT BUDAPEST, 1972

TRANSZCENDENS SZÁMOK II.

KURT MAHLER

KONVERGENS LAURENT-SOROK ÉS FORMÁLIS LAURENT-SOROK

19. Azok a számok, melyekről el kívánjuk dönteni, hogy algebraiak vagy transzcendensek, gyakran valamely $f(z)$ egyváltozós analitikus függvény $z=\alpha$ *algebrai pontjaiban* (azaz α algebrai szám) felvett $\beta=f(\alpha)$ függvényérték alakban adottak. Az analitikus függvények viszont megadhatók az elemeik által, vagyis mindazon konvergens hatványsorok által, melyek valamely körben előállítják a függvényt.

Általánosabban foglalkozzunk az

$$f(z) = \sum_{h=\eta}^{\infty} f_h(z-c)^h$$

Laurent-sorral, amely konvergál az

$$U_\varrho(c): \qquad 0 < |z-c| < \varrho$$

tartományban. Itt c egy komplex, ϱ egy pozitív szám, és η egy tetszőleges egész.

Ha $\eta<0$, $f(z)$-nek pólusa van a $z=c$ pontban, ha ellenben $\eta>0$, akkor $f(z)$ reguláris $U_\varrho(c)$ $z=c$ középpontjában is. Az utóbbi esetben a Laurent-sor $f(z)$ közönséges Taylor-sorával azonos.

Ha $\varrho=\infty$ a Laurent-sor konvergál az egész síkon, kivéve esetleg a $z=c$ pontot, ha az pólus. Ha ellenben ϱ véges, akkor $f(z)$ esetleg folytatható az $U_\varrho(c)$ tartományon kívül. A $\beta=f(\alpha)$ függvényérték vizsgálatához ilyen folytatásra általában nem lesz szükség és elegendő lesz $f(z)$-t $U_\varrho(c)$-beli z értékekre tekintenünk.

Az $f(z)$ függvény Laurent-sorának néhány alapvető tulajdonsága algebrai jellegű és semmi kapcsolatban nem áll a sor konvergenciájával.

Ezért bevezetjük az általánosabb formális Laurent-sorok osztályát, ahol ezek a tulajdonságok igen egyszerű alakot öltenek.

20. Legyen K egy tetszőleges zéró karakterisztikájú test. A továbbiakban kiemelkedő szerepük lesz a következő testeknek: Q a racionális számok, A az algebrai számok, R a valós számok és C a komplex számok teste. Legyen továbbá z egy határozatlan. Vezessük be a következő jelöléseket: $K[z]$ a z határozatlanú K-beli együtthatós (a továbbiakban K-feletti) polinomok gyűrűje. $K(z)$ a $K[z]$ hányados teste, melynek elemei a z racionális függvényei, K-beli együtthatókkal.

$K\langle z-c\rangle$, ahol c K-beli, az

$$f = \sum_{h=\eta}^{\infty} f_h(z-c)^h$$

formális Laurent-sorok halmaza, ahol f_h K-beli és η valamely f-től függő egész szám. Bevezetve az

$$f_h=0, \quad \text{ha} \quad h<\eta$$

jelölést, a sor a következő jobban kezelhető alakba írható:

$$f = \sum_{h=-\infty}^{\infty} f_h (z-c)^h.$$

K elemei játsszák a *konstansok* szerepét, míg azon elemek, melyek csak $K[z]$, $K(z)$ vagy $K\langle z-c\rangle$-beliek, *függvények*.

A $K\langle z-c\rangle$ halmaz gyűrűvé válik, ha az összeadás és szorzás műveletét a következőképpen definiáljuk. Ha

$$g = \sum_{h=-\infty}^{\infty} g_h (z-c)^h,$$

ahol $g_h = 0$, hacsak $h < \xi$ egy másik Laurent-sor $K\langle z-c\rangle$-ben, akkor legyen

$$f+g = \sum_{h=-\infty}^{\infty} (f_h + g_h)(z-c)^h$$

és

$$fg = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k g_{h-k} (z-c)^h.$$

Ekkor nyilvánvaló, hogy $f+g$ $K\langle z-c\rangle$-ben van. Az fg szorzatot tekintve a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k g_{h-k}$$

összeg legfeljebb véges sok nullától különböző tagot tartalmaz, és minden tagja nulla, ha h negatív és $|h|$ elég nagy. Így fg is $K\langle z-c\rangle$-ben van. Abban a speciális esetben, amikor $K = C$ és a sor valamely $U_\varrho(c)$ tartományban konvergál, a most definiált műveletek megegyeznek a konvergens sorokra vonatkozó megfelelő műveletekkel. Könnyen igazolható, hogy az összeadás és a szorzás $K\langle z-c\rangle$-ben *kommutatív*, *asszociatív* és *disztributív*. Azonosítsuk $K\langle z-c\rangle$

$$f_0 + \sum_{h=1}^{\infty} 0(z-c)^h \quad \text{ahol} \quad f_0 \in K$$

elemét az f_0 K-beli elemmel, így K a $K\langle z-c\rangle$ részteste lesz. Általánosabban legyen a egy $K[z]$-beli polinom. Ez a polinom felírható

$$a = \sum_{k=0}^{m} a_h (z-c)^h$$

alakban, ahol az a_h együtthatók K-beliek. Azonosítsuk a-t $K\langle z-c\rangle$

$$\sum_{k=0}^{m} a_h (z-c)^h + \sum_{k=m+1}^{\infty} 0(z-c)^h$$

elemével. Ezzel a leképezéssel $K[z]$ nyilvánvalóan $K\langle z-c\rangle$ részgyűrűje lesz.

21. Könnyű belátni, hogy $K\langle z-c\rangle$ valójában test. Legyen ugyanis f egy tetszőleges nullától különböző eleme $K\langle z-c\rangle$-nek. Ekkor létezik egy olyan η index, melyre

$$f_\eta \neq 0, \quad \text{de} \quad f_h = 0, \quad \text{ha} \quad h < \eta.$$

η-t az f *rendjének* nevezzük és így jelöljük:

$$\operatorname{ord} f = \eta.$$

Mármost létezik $K\langle z-c\rangle$-nek egy másik, 0-tól különböző

$$f^{-1} = \sum_{k=-\eta}^{\infty} f_h^*(z-c)^h$$

eleme, mely rendelkezik az alábbi tulajdonsággal:

$$f f^{-1} = 1.$$

Ugyanis ez a reláció ekvivalens az f^{-1} f_h^* együtthatóira vonatkozó alábbi végtelen lineáris egyenletrendszerrel

$$f_\eta f_{-\eta}^* = 1, \quad f_\eta f_{-\eta+1}^* + f_{\eta+1} f_{-\eta}^* = 0, \quad f_\eta f_{-\eta+2}^* + f_{\eta+1} f_{-\eta+1}^* + f_{\eta+2} f_{-\eta}^* = 0, \ldots$$

és ezek a lineáris egyenletek lépésről lépésre megoldhatók, mert f_η a feltevés szerint nem zérus. f^{-1} létezése $K\langle z-c\rangle$ minden $f \neq 0$ elemére azt jelenti, hogy $K\langle z-c\rangle$ test. Mivel már tudjuk, hogy es a test tartalmazza a $K[z]$ gyűrűt, így annak $K(z)$ hányadostestét is tartalmazza résztestként.

22. Az eddigiekben az f rendjét csak 0-tól különböző f-re definiáltuk, legyen ebben a speciális esetben

$$\operatorname{ord} 0 = \infty.$$

Ezzel a konvencióval könnyűszerrel igazolhatók az elemek rendjének alábbi tulajdonságai:

$$\operatorname{ord}(f+g) \geqq \min(\operatorname{ord} f, \operatorname{ord} g), \quad \operatorname{ord}(fg) = \operatorname{ord} f + \operatorname{ord} g. \tag{1}$$

Speciálisan legyen a egy nullától különböző polinom. Ekkor nyilván a rendje és foka között fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\operatorname{ord} a \leqq \partial(a). \tag{2}$$

23. $K\langle z-c\rangle$ elemeire definiálható a *differenciálás* formális művelete. Legyen ismét

$$f = \sum_{h=\eta}^{\infty} f_h(z-c)^h$$

a fenti testnek egy általános eleme. f n-edik deriváltját a

$$\frac{d^n f}{dz^n} = f^{(n)} = \sum_{h=\eta}^{\infty} h(h-1)\ldots(h-n+1) f_h (z-c)^{h-n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

képlettel adjuk meg, így $f^{(n)}$ is $K\langle z-c\rangle$-beli. Nem nehéz belátni, hogy

$$f^{(n+1)} = \frac{df^{(n)}}{dz}, \quad f^{(n+p)} = \frac{d^p f^{(n)}}{dz^p} \tag{3}$$

és

$$(f+g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + g'f, \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \tag{4}$$

Itt g $K\langle z-c\rangle$ egy másik eleme, és az utolsó formulában feltételezzük, hogy g nullától különböző. Nyilvánvaló, hogy

(5) $$\operatorname{ord} f' = (\operatorname{ord} f)-1, \quad \text{ha} \quad \operatorname{ord} f \neq 0.$$

Ha azonban $\operatorname{ord} f=0$, akkor $\operatorname{ord} f'$ tetszőleges nem negatív értéket felvehet. Speciálisan f' akkor és csak akkor tűnik el, ha eleme a konstansok K testének.

24. Abban a speciális esetben, mikor $K=C$ a komplex számtest, jelölje $C\{z-c\}$ mindazon $C\langle z-c\rangle$-beli f sorok halmazát, melyek valamely

$$U_\varrho(c):\quad 0<|z-c|<\varrho$$

tartományban konvergálnak, ahol ϱ egy pozitív f-től függő szám. A $\varrho=\infty$ eset is megengedhető. Mint már a 20. §-ban említettük, a $C\langle z-c\rangle$-ben definiált műveletek $C\{z-c\}$-ben konvergens Laurent-sorok összeadásává és szorzásává válnak és ugyanez áll a differenciálásra is.

Ha f egy $C\{z-c\}$-beli sor, akkor megállapodunk abban, hogy mindig $f(z)$-vel jelöljük azt az $U_\varrho(c)$-ben analitikus függvényt, amelyhez ez a Laurent-sor konvergál.

Nyilvánvaló, hogy $C\{z-c\}$ gyűrű. Valójában ez egy test. Legyen ugyanis $f\in C\{z-c\}$ f nem nulla. Mivel $z=c$ legfeljebb egy pólusa $f(z)$-nek, és mivel ez a függvény reguláris, valamely $U_\varrho(c)$ tartományban, létezik egy esetleg kisebb

$$U_\sigma(c):0<|z-c|<\sigma,$$

ahol $0<\sigma<\varrho$ tartomány, úgy, hogy $f(z)$ nem tűnik el $U_\sigma(c)$-ben. Így a reciprok függvény $f(z)^{-1}$ reguláris $U_\sigma(c)$-ben, és legfeljebb egy pólusa van $z=c$-ben. Következőleg $f(z)^{-1}$ egy $U_\sigma(c)$-ben konvergáló Laurent-sorba fejthető és ez éppen a $C\langle z-c\rangle$-ben definiált f^{-1} sor lesz.

25. Legyen $w_0, w_1, \dots w_n$, ahol $n\geqq 0$ $n+1$ újabb határozatlan és legyen $A(z, w_0, w_1, \dots, w_n)$ a $z, w_0, w_1, \dots w_n$ egy nem nulla polinomja, melynek együtthatói K-beliek. Gyakran foglalkozunk majd olyan $f\in K\langle z-c\rangle$ sorokkal, melyek kielégítenek egy

$$A(z, f, f', \dots, f^{(n)}) = 0$$

típusú formális algebrai differenciálegyenletet és a későbbi fejezetekben részletesen vizsgálni fogjuk a $K=Q$ és a $K=A$ eseteket.

Már most bebizonyítjuk a következő tételt, melynek egy speciális esetére hamarosan szükségünk lesz:

(6) *Legyen K_0 a K egy részteste és legyen c K_0-beli, valamint f $K_0\langle z-c\rangle$-beli. Tegyük fel, hogy létezik egy nem azonosan zérus $A(z, w_0, w_1, \dots w_n)$ K-feletti polinom, melyre*

$$A(z, f', \dots, f^{(n)}) = 0$$

Ekkor létezik egy nem azonosan zérus $A_0(z, w_0, w_1, \dots w_n)$ K_0-feletti polinom is, melyre

$$A_0(z, f, f', \dots, f^{(n)}) = 0$$

Bizonyítás: Az $A(z, w_0, w_1, \dots w_n)$ polinom felírható a következő összeg-alakban:

$$A(z, w_0, w_1, \dots, w_n) = \sum_{\tau=1}^{t} A_\tau z^{\nu_\tau} w_0^{\nu_{\tau 0}} w_1^{\nu_{\tau 1}}, \dots, w_n^{\nu_{\tau n}}.$$

ahol t egy pozitív egész $A_1, \dots A_t$ a K véges sok nullától különböző eleme és a

$\nu_\tau, \nu_{\tau 0}, \nu_{\tau 1}, \dots \nu_{\tau n}$ kitevők bizonyos nem negatív egésznek. Legyen $B_1, \dots B_t$ t határozatlan és legyen

$$B(z, w_0, w_1, \dots, w_n) = \sum_{\tau=1}^{t} B_\tau z^{\nu_\tau} w_0^{\nu_{\tau 0}} w_1^{\nu_{\tau 1}}, \dots, w_n^{\nu_{\tau n}}$$

Ekkor

$$B(z, f', \dots, f^{(n)}) = \sum_{\tau=1}^{t} B_\tau g_\tau$$

ahol a

$$g_\tau = z^{\nu_\tau} f^{\nu_{\tau 0}} f'^{\nu_{\tau 1}}, \dots, f^{(n)\,\nu_{\tau n}} \qquad (\tau = 1, 2, \dots, t)$$

szorzatok $K_0\langle z-c\rangle$ elemei, azaz mondhatjuk, hogy

$$g_\tau = \sum_{h=-\infty}^{\infty} g_{\tau h}(z-c)^h \qquad (\tau = 1, 2, \dots, t)$$

Következésképpen

$$B(z, f, f, \dots, f^{(n)}) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\tau=1}^{t} B_\tau g_{\tau h} \right) (z-c)^h.$$

Itt a jobb oldal akkor és csak akkor az azonosan zérus sor, ha $B_1, \dots B_t$ kielégíti az összes

$$\sum_{\tau=1}^{t} B_\tau g_{\tau h} = 0 \qquad (h = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$$

homogén lineáris egyenletet. Ezen végtelen sok lineáris egyenlet közül legfeljebb véges sok lehet lineárisan független a K_0 felett. Legyen

$$\sum_{\tau=1}^{t} B_\tau g_{\tau h_\sigma} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, s)$$

ilyen lineárisan független egyenletek egy maximális rendszere. Ezen egyenletek együtthatói K_0-ban vannak és

$$B_1 = A_1 \neq 0, \dots, B_t = A_t \neq 0$$

egy nem triviális megoldásrendszer. Ebből következik, hogy a fenti egyenleteknek van egy

$$B_1 = A_{01}, \dots, B_t = A_{0t}$$

megoldásrendszere is, ahol $A_{01}, \dots, A_{0t}$ nem mind nulla és K_0-beli. Így

$$\sum_{\tau=1}^{t} A_{0\tau} g_{\tau h} = 0 \qquad (h = 0, \mp 1, \mp 2, \dots,)$$

és az új

$$A_0(z, w_0, w_1, \dots, w_n) = \sum_{\tau=1}^{t} A_{0\tau} z^{\nu_\tau} w_0^{\nu_{\tau 0}} w_1^{\nu_{\tau 1}}, \dots, w_n^{\nu_{\tau n}}$$

polinom eleget tesz a tétel állításának.

Fogalmazzuk meg tételünket explicit alakban az $n=0$ speciális esetben, hamarosan szükségünk lesz rá.

(7) *Legyen K_0 a K egy résztesteste, és legyen c K_0-, f pedig $K_0\langle z-c\rangle$-beli. Tegyük fel, hogy létezik egy $A(z, w)$ nem azonosan zérus K-feletti polinom, melyre*

$$A(z, f) = 0.$$

Ekkor létezik egy $A_0(z, w)$ nem azonosan zérus K_0-feletti polinom is, melyre:

$$A_0(z, f)=0.$$

26. Az 1. §-ban megkülönböztettünk algebrai és transzcendens számokat. Hasonló megkülönböztetés létezik analitikus függvényekre még általánosabban $K\langle z-c\rangle$-beli formális Laurent-sorokra is.

$K\langle z-c\rangle$ valamely f elemét *algebrainak* nevezzük, ha létezik egy nem azonosan zérus $A(z, w)$ K-feletti polinom, melyre

$$A(z, f)=0, \tag{8}$$

és f-et *transzcendensnek* nevezzük, ha nincs ilyen polinom.

Legyen sepciálisan $K=C$ a komplex számtest és legyen f a $C\langle z-c\rangle$ $C\{z-c\}$ résztestének eleme. Ha f algebrai a $C\langle z-c\rangle$-re nézve és például (8) egyike azon algebrai egyenleteknek, melyeket f kielégít, akkor a megfelelő $f(z)$ analitikus függvény z-ben azonosan kielégíti az

$$A(z, f(z))=0$$

algebrai egyenletet, ilyenkor $f(z)$-t *algebrai analitikus függvénynek* nevezzük. Ha ellenben f transzcendens $C\langle z-c\rangle$-re nézve, akkor $f(z)$ transzcendens analitikus függvény. A komplex függvénytanban számos olyan egyszerű tulajdonság ismeretes, mely lehetőséget ad az algebrai és a transzcendens analitikus függvények megkülönböztetésére. Ezen tulajdonságok egyikének sincs nyilvánvaló kiterjesztése az általános $K\langle z-c\rangle$-testbeli formális Laurent-sorokra. Azonban mégis lehet $K\langle z-c\rangle$ elemei transzcendenciájára egy szükséges és elégséges feltételt nyerni. Ez a feltétel algebrai természetű és a valós, ill. komplex számokra vonatkozó 3. Tétel analogonja, sőt még a bizonyítás is nagyon hasonló.

27. Az alábbi bizonyításban a következő jelölésekre lesz szükség. Jelölje $K[z, w]$ z és w összes K feletti polinomjainak gyűrűjét, $K(z)[w]$ a w összes $K(z)$-feletti polinomjainak gyűrűjét és $K\langle z-c\rangle[w]$ a w összes $K\langle z-c\rangle$-feletti polinomjainak gyűrűjét. Mindhárom esetben $\partial_w(a)$ jelöli $a(z, w)$ fokát w-ben és hasonlóképpen ∂_z jelöli $a(z, w)$ fokát z-ben, ha az $K[z, w]$-ben van. Az utóbbi esetben legyen

$$\lambda(a) = \partial_z(a)+\partial_w(a).$$

Ha $A(z, w)$ a zérus polinom 0, akkor a $\partial_z(0)$, $\partial_w(0)$ és $\lambda(0)$ mennyiségek mindegyikét ∞-nek definiáljuk. Fennállnak a polinomok összege, illetve szorzata fokszámára szokásos összefüggések, nevezetesen

$$\lambda(a+b) \leqq \max\big(\lambda(a), \lambda(b)\big), \ \lambda(ab) = \lambda(a)+\lambda(b).$$

Legyen továbbá f $K\langle z-c\rangle$ egy tetszőleges algebrai eleme. Jelölje $\Sigma(f)$ mindazon $K(z)[w]$-beli

$$A^*(w) = A_0^* + A_1^* w + \ldots + A_M^* w$$

polinomok halmazát, melyre

$$A_M^* \neq 0 \quad \text{és} \quad A^*(f) = 0.$$

$\Sigma(f)$-ben létezik legalább egy legkisebb fokszámú $A^*(w)$ polinom $\partial_w(A^*)=M$. Ekkor f-et M-edfokúnak nevezzük a $K(z)$ felett és így jelöljük:

$$\partial^\circ(f)=M.$$

Legyen $A^*(w)\in\Sigma(f)$ egy ilyen legkisebb fokszámú polinom, jelölje az együtthatókat képező $A_0^*, A_1^*, \dots A_M^*$ racionális függvények nevezőinek legkisebb közös többszörösét d és legyen

$$A(z, w) = d\,A^*(w) = A_0+A_1w+\dots+A_Mw_M.$$

Ez az új polinom mind $\Sigma(f)$-nek, mind $K[z, w]$-nek eleme. Könnyen belátható, hogy irreducibilis $K[z, w]$ felett és egy K-beli el nem tűnő faktortól eltekintve egyértelmű. Ekkor ismét azt mondjuk, hogy $A(z, w)$ az f *minimálpolinomja.*

Nyilván

$$\partial^\circ(f)=\partial_w(A)=M.$$

Legyen továbbá

$$L^0(f)=\partial_z(A)=\max\left(\partial(A_0), \partial(A_1), \dots \partial(A_M)\right)$$

és nevezzük $L^0(f)$-et az f *szélességének.*

28. Tegyük fel, hogy $f\in K\langle z-c\rangle$ algebrai és legyen

$$A(z, w) = A_0+A_1w+\dots+A_Mw^M$$

a minimálpolinomja. Mivel $A(z, w)$ eltűnik, ha $w=f$, létezik egy alábbi szorzatfelbontása $K\langle z-c\rangle[w]$-ben:

$$A(z, w) = (w-f)B(w), \tag{10}$$

ahol $B(w)\in K\langle z-c\rangle[w]$ w-nek polinomja, de nem szükségképpen polinomja z-nek is, és $B(w)$ a következő alakba írható:

$$B(w) = B_0+B_1w+\dots+B_{M-1}w^{M-1}.$$

Itt $B_0, B_1, \dots B_{M-1}$ $K\langle z-c\rangle$-beliek és explicit alakjuk a következő

$$B_k = A_{k+1}+A_{k+2}f+\dots+A_mf^{m-k+1} \qquad (k=0, 1, \dots, M-1).$$

A továbbiakban tegyük fel, hogy

$$\operatorname{ord} f\geqq 0. \tag{11}$$

Az $A_0, A_1, \dots, A_M$ polinomok rendje nem negatív, következésképpen

$$\operatorname{ord} B_k\geqq 0 \qquad (k=0, 1, \dots M-1). \tag{12}$$

Legyen most

$$a(z, w) = a_0+a_1w+\dots+a_mw^m$$

egy tetszőleges polinom $K[z, w]$-ben, melyre

$$a_m\neq 0, \quad a(z, f)\neq 0$$

$a(z, w)$ z, ill. w szerinti foka:

$$\partial_z(a)=\max\left(\partial(a_0), \partial(a_1), \dots \partial(a_m)\right), \quad \partial_w(a)=m.$$

Mivel $A(z, w)$ irreducibilis és $w=f$ esetén eltűnik, míg $a(z, w)$ nem tűnik el, $A(z, w)$ és $a(z, w)$ w-re vonatkozó rezultánsa

$$\left.\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & \cdots & A_M & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_0 & A_1 & \cdots & \cdots & A_M \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_0 & a_1 & \cdots & a_m \end{vmatrix}\right. \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \text{ sor} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} M \text{ sor} \end{array}$$

nem nulla. Ez a rezultáns egy $K(z)$-beli polinom, melynek foka kielégíti az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\partial\big(R(A, a)\big) \leqq m\partial_z(A)+M\partial_z(a).$$

A polinomok rendje és foka közötti (2) összefüggés alapján, ebből az is következik, hogy

(13) $$\operatorname{ord} R(A, a) \leqq m\partial_z(A)+M\partial_z(a).$$

A rezultánsok szorzására vonatkozó általános formula szerint $A(z, w)$ (10)-es előállításából következik, hogy

(14) $$R(A, a) = R(w-f, a)\, R(B, a).$$

Továbbá

(15) $$R(w-f, a) = a(z, f) \geqq 0.$$

Az $R(B, a)$ rezultáns is felírható az $R(A, a)$-hoz hasonló determináns alakban, mégpedig hozzá ezen determináns minden eleme vagy egy B_k sor, vagy egy a_k polinom vagy 0, azaz nem negatív rendű a (12) szerint. Így

$$\operatorname{ord} R(B, a) \geqq 0$$

is fennáll.

Másrészt (14) és (15) szerint

$$\operatorname{ord} R(B, a) = \operatorname{ord} R(A, a) - \operatorname{ord} a(z, f),$$

következésképpen a (13) becslésből adódik, hogy

$$\operatorname{ord} a(z, f) \leqq m\partial_z(A)+M\partial_z(a).$$

Eredményünk a következőképpen fogalmazható meg:

(16) *Legyen f $K\langle z-c\rangle$ valamely algebrai eleme, melynek rendje*

$$\operatorname{ord} f \geqq 0.$$

Ha $a(z, w)$ egy tetszőleges polinom $K[z, w]$-ben, akkor vagy

$$a(z, f) = 0,$$

vagy

$$a(z, f) \neq 0 \quad \text{és} \quad \operatorname{ord} a(z, f) \leqq L^0(f)\partial_w(a)+\partial^0(f)\partial_z(a).$$

Tételünk az 1. Tételnek a $K\langle z-c\rangle$ testre vonatkozó analogonja.

Az ord f-re vonatkozó megszorítástól könnyű megszabadulni, ezt az olvasóra bízzuk.

29. Egy későbbi alkalmazás érdekében megvizsgálunk egy speciális esetet $a(z, w)$-nek az alábbi lineáris polinomot választjuk:

$$a(z, w) = w - a_1,$$

ahol a_1 egy $K[z]$-beli polinom. Ebben az esetben

$$\partial_z(a) = \partial(a_1), \quad \partial_w(a) = 1.$$

Ekkor, ha $f \in K\langle z-c \rangle$ algebrai és ord $f \geqq 0$, továbbá f nem polinom $K[z]$-ben, akkor minden $K[z]$-beli a_1-re

$$\text{(17)} \qquad \operatorname{ord}(f - a_1) \leqq L^0(f) + \partial^0(f)\partial(a_1).$$

Ebből az egyenlőtlenségből könnyen adódik a transzcendentalitás alábbi elégséges feltétele:

(18) *Tegyük fel, hogy $f \in K\langle z-c \rangle$ nem polinom és hogy létezik polinomok egy*

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

végtelen sorozata $K[z]$-ben, melyre

$$\lim_{r\to\infty} \partial(a_r) = \infty, \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{ord}(f-a_r)}{\partial(a_r)} = \infty.$$

Ekkor f transzcendens.

Ugyanis ha r elég nagy,

$$\operatorname{ord} f = \operatorname{ord}\{(f-a_r)+a_r\} \leqq \min\left(\operatorname{ord}(f-a_r), \operatorname{ord} a_r\right) \geqq 0,$$

mivel ord a_r nem lehet negatív. Így az állítás közvetlenül következik (17)-ből.

Az alkalmazások szempontjából előnyösebb a transzcendencia fenti kritériumát egy másik ezzel ekvivalens alakban megadni:

Az

$$f = \sum_{h=0}^{\infty} f_h (z-c)^h$$

$K\langle z-c \rangle$-beli sort *erősen hézagosnak* nevezzük, ha létezik az egész számoknak egy

$$\{s_1, s_2, s_3, \ldots\} \quad \text{és egy} \quad \{t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots\}$$

sorozata, melyekre

$$0 = t_0 \leqq s_1 < t_1 \leqq s_2 < t_2 \leqq s_3 < t_3 \leqq \ldots, \qquad \lim_r \frac{t_r}{s_r} = \infty,$$

$$f_{s_r} \neq 0, \quad f_{t_r} \neq 0, \quad \text{de} \quad f_h = 0 \quad \text{ha} \quad s_r < h < t_r \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots,)$$

Alkalmazzuk (18)-at oly módon, hogy legyen

$$a_r = \sum_{h=0}^{s_r} f_h (z-c)^h, \qquad f - a_r = \sum_{h=t_r}^{\infty} f_h (z-c)^h$$

Ekkor a következő eredményre jutunk.

(19) *Minden erősen hézagos sor transzcendens.*

30. Az eddigiekben $f \in K\langle z-c\rangle$ $\partial^0(f)$ fokát csak akkor definiáltuk, ha f algebrai. Ha f transzcendens, akkor a következő konvenciót használjuk:

$$\partial^0(f) = \infty,$$

ahol ∞ ismét minden egész számnál nagyobbnak tekintendő.

Legyen most m és t két pozitív egész és legyen f egy olyan algebrai vagy transzcendens eleme $K\langle z-c\rangle$-nek, melyre

$$\operatorname{ord} f \geqq 0, \quad \partial^0(f) > m.$$

Jelöljön továbbá $a(z, w)$ egy tetszőleges $K[z, w]$-beli polinomot, melyre

$$\partial_z(a) \leqq t, \quad \partial_w(a) \leqq m$$

fennáll.

A legáltalánosabb ilyen típusú polinom

$$a(z, w) = \sum_{h=0}^{t} \sum_{k=0}^{m} a_{hk} z^h w^k$$

ahol az a_{hk} együtthatók K-beliek. $w = f$ helyettesítéssel $a(z, f)$ $K\langle z-c\rangle$ elemévé válik, azaz felírható

$$a(z, f) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h (z-c)^h$$

alakban. Itt az új α_h együtthatók homogén lineáris polinomjai az $(m+1)(t+1)$ a_{hk} paraméternek K-beli együtthatókkal. Ezek az a_{hk}-k megválaszthatók úgy K-ban, hogy ne tűnjék el mindegyikük és hogy az együtthatók közül $(m+1)(t+1)-1$ zérus legyen. Legyenek ezek azok az együtthatók, melyekre

$$h = 0, 1, 2, \ldots \quad (m+1)(t+1)-2.$$

Következésképpen

$$\operatorname{ord} a(z, f) \geqq (m+1)(t+1)-1.$$

Továbbá

$$a(z, f) \neq 0,$$

mivel $\partial^0(f) > m$.

Ezért fennáll a következő tétel:

(20) *Legyen m és t két pozitív egész és legyen $f \in K\langle z-c\rangle$ olyan, hogy* $\operatorname{ord} f \geqq 0$, $\partial^0(f) > m$ *Ekkor létezik egy a polinom $K[z, w]$-ben, mely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

$$\partial_z(a) \leqq t, \quad \partial_w(a) \leqq m, \quad a(z, f) \neq 0, \quad \operatorname{ord} a(z, f) \geqq mt + m + t.$$

Ez az eredmény a 2. Tétel analogonja.

31. Az eddigiek alapján könnyűszerrel megadható a transzcendencia alábbi szükséges és elégséges feltétele.

4. Tétel: Egy $K\langle z-c\rangle$-beli f sor, melyre $\operatorname{ord} f \geqq 0$ *akkor és csak akkor transzcendens, ha létezik polinomoknak egy*

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

végtelen sorozata $K[z, w]$-ben és pozitív számoknak egy

$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$$

végtelenhez konvergáló sorozata, úgy hogy

$$a_r(z,f)\neq 0, \quad \operatorname{ord} a_r(z,f)\geqq \omega_r\lambda(a_r) \qquad (r=1,2,3,\ldots).$$

Bizonyítás. A feltételekből következik, hogy f transzcendens. Ha ugyanis f algebrai, akkor (16)-ból következik, hogy

$$\operatorname{ord} a_r(z,f)\leqq \{L_0(f)+\partial^0(f)\}\ \lambda(a_r) \qquad (r=1,2,3\ldots).$$

Ha viszont f transzcendens, akkor alkalmazzuk (20)-at úgy, hogy legyen

$$t=m=r \qquad (r=1,2,3,\ldots).$$

Ekkor azt tapasztaljuk, hogy létezik polinomoknak egy $a_r\in K[z,w]$ sorozata, melyre

$$a_r(z,f)\neq 0,\ \lambda(a_r)\leqq 2r,\ \operatorname{ord} a_r(z,f)>r^2 \qquad (r=1,2,3,\ldots)$$

és ez a sorozat rendelkezik a tételben állított tulajdonságokkal.

A 4. Tétel a valós vagy komplex számokra vonatkozó 3. Tétel megfelelője. Bár a 4. Tétel szükséges és elégséges feltételt ad a formális sorok transzcendenciájára, mégis sok kérdést hagy nyitva.

Úgy tűnik, hogy a tétel semmiféle választ nem ad a következő kérdésre:

A. Probléma: Ha

$$f=\sum_{h=0}^{\infty} f_h(z-c)^h$$

$K\langle z-c\rangle$ egy olyan algebrai eleme, amely nem polinom, akkor létezhet-e tetszőleges hosszúságú $f_h, f_{h+1}, \ldots f_k$ csupa zérus elemből álló együtthatósorozat? Erre a kérdésre semmilyen választ nem ismerek. Abban a speciális esetben, amikor $f\in K(z)$ egy racionális függvény, a válasz negatív, sőt ennél több is ismert, de a bizonyítás bonyolult.

(Mahler 1935, Lech 1954, Mahler 1956)

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ЧИСЛА II

КУРТ МАЛЕР

TRANSCENDENTAL NUMBERS II.

K. MAHLER